

Formulações não lineares de elementos finitos de treliça 2D para análise de estruturas com grandes deslocamentos

Nonlinear formulations of 2D truss finite element for analysis of structures with large displacements

Article Info:

Article history: Received 2022-04-04 / Accepted 2022-09-21 / Available online 2022-09-27

doi: 10.18540/jcecv18iss7pp14600-01e

Luiz Antonio Farani de Souza

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7194-5851>

Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR, Brasil

E-mail: lasouza@utfpr.edu.br

Everton Luis Consoni da Silva

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0566-7296>

Universidade Estadual de Maringá - UEM, Brasil

E-mail: pg403386@uem.br

Resumo

A investigação completa da trajetória de equilíbrio de sistemas estruturais não lineares tem grande interesse prático no que diz respeito ao seu comportamento crítico, como na análise de flambagem em barras de treliças. O estudo de estruturas com grandes deslocamentos demanda a criação de modelos físico-matemáticos que incluem com precisão as condições de carregamento e apoio e, mais importante, modelem a rigidez e a resposta mecânica da estrutura. O objetivo deste artigo é apresentar um estudo de formulações de elementos finitos de barra para a análise não linear de estruturas reticuladas planas constituídas por barras biarticuladas. A solução do sistema de equações não lineares, que descreve o problema estrutural, é obtida por um procedimento incremental-iterativo baseado no método de Potra-Pták com ordem de convergência cúbica. Esse procedimento tem dois passos no ciclo iterativo e é associado à técnica de continuação Norma Mínima dos Deslocamentos Residuais. Um código computacional com o programa livre Scilab é desenvolvido e o comportamento das estruturas é descrito por curvas no espaço deslocamento – carga.

Palavras-chave: Treliça plana. Potra-Pták. Elementos Finitos. Formulação Corrotacional. Formulação Posicional.

Abstract

The complete investigation of the equilibrium path of nonlinear structural systems is of great practical interest regarding your critical behavior, as in the analysis of buckling in truss bars. The study of structures with large displacements demands the creation of physical-mathematical models that accurately include loading and support conditions and, most importantly, model the rigidity and mechanical response of the structure. The objective of this article is to present a study of finite element formulations of bar for the nonlinear analysis of planar reticulated structures constituted by bi-articulated bars. The solution of the system of nonlinear equations, that describes the structural problem, is obtained by an iterative-incremental procedure based on the Potra-Pták method with order of cubic convergence. This procedure has two steps in the iterative cycle and is associated with the Minimum Standard for Residual Displacements path-following technique. A computational code with the free program Scilab is developed and the behavior of structures is described by curves in displacement-load space.

Keywords: Plane truss. Potra-Pták. Finite Elements. Co-rotational Formulation. Positional Formulation.

1. Introdução

Sistemas treliçados são frequentemente utilizados em estruturas da engenharia civil, como em edifícios, pontes e torres de transmissão (Liu et al., 2021). Projetar estruturas mais econômicas e mais competitivas requer a redução do peso estrutural e do consumo de materiais (Felipe et al., 2019). Estruturas esbeltas e leves com grandes vãos livres destacam a importância de os engenheiros calculistas levarem em consideração no dimensionamento os efeitos não lineares que influenciam significativamente no comportamento estrutural (Maximiano et al., 2019; Oliveira et al., 2017; Thai e Kim, 2009).

A análise estrutural linear clássica pressupõe uma proporcionalidade entre o carregamento aplicado e o deslocamento, desde que se verifiquem condições de resposta elástica linear do material e de deformações infinitesimais (Bidmeshki e Habibi, 2021; Reddy, 2014). As estruturas de aço são muito práticas na indústria da construção civil. Embora a teoria fundamental da análise estrutural e as formulações lineares elásticas sejam usualmente utilizadas para análise e projeto dessas estruturas, elas podem sofrer grandes deslocamentos em situações atípicas de carga antes de atingirem seu limite de resistência (Habibi e Bidmeshki, 2018).

Dois tipos diferentes de não linearidades podem ser identificados na análise de sistemas estruturais, que são a física e a geométrica (Torkamani e Shieh, 2011). Esta não linearidade é produzida por deformações finitas acompanhadas de modificações na rigidez de uma estrutura sob um certo carregamento aplicado, e aquela depende das deformações relacionadas às propriedades do material (Pinheiro e Silveira, 2004).

Uma investigação completa do comportamento de estruturas com grandes deslocamentos requer traçar o caminho de equilíbrio e identificar os pontos críticos (Stanić et al., 2016). Para superar as dificuldades numéricas nesses pontos, várias técnicas de continuação foram desenvolvidas, como o controle de deslocamento, o controle de trabalho externo e o comprimento de arco. Cada um desses métodos tem suas próprias vantagens e desvantagens (Thai e Kim, 2011). A resposta não linear de um sistema estrutural genérico pode ser vista na Figura 1, em que um determinado componente de deslocamento pode incrementar-se ou sofrer decréscimos ao longo da trajetória. Nessa figura, estão identificados os Pontos Limites de Força (A, D), os Pontos Limites de Deslocamento (B, C) e o Ponto de Falha (E) (Matias Silva, 2002).

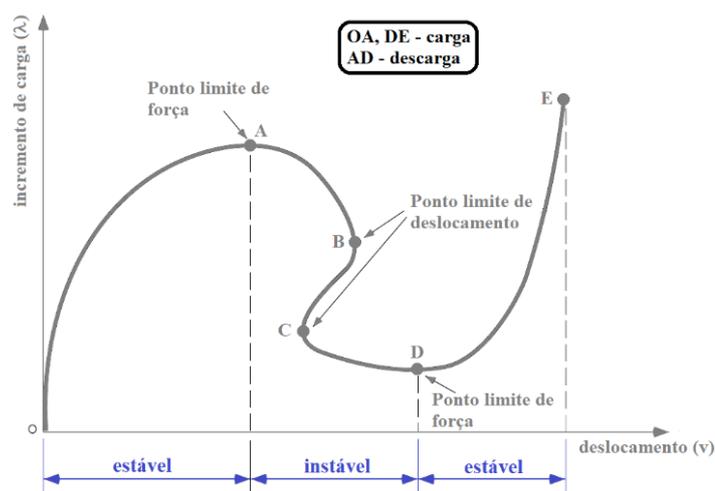


Figura 1 – Trajetória de equilíbrio não linear com pontos limites e de falha. Fonte: adaptada de Matias Silva (2002).

Quando o Método dos Elementos Finitos (MEF) é utilizado na solução de problemas da Mecânica dos Sólidos Computacional sob regime não linear geométrico, três formulações podem ser consideradas para descrever o movimento, a saber: Lagrangiana total, Lagrangiana atualizada e Corrotacional (Kzam, 2020).

A descrição Lagrangeana mede as mudanças configurativas nas estruturas a partir de um ponto de referência no espaço, que pode ser atualizada ou total. Se a referência for atualizada durante a deformação do elemento, a mesma é chamada de atualizada. Se a referência for a configuração inicial estabelecida durante a deformação do elemento, então é chamada de total (Greco e Venturin, 2006).

A formulação Corrotacional baseia-se na decomposição da configuração de referência em duas partes: a inicial indeformada ou de referência, em que é fixa em cada elemento da malha quando o sólido está em repouso; e a corrotacionada, que se move junto com cada elemento e expressa o movimento de corpo rígido do elemento em relação à configuração indeformada. O movimento deformacional é medido por meio da configuração deformada com relação à configuração corrotacionada (Taylor Matias e Mendes, 2009).

A formulação Posicional de Elementos Finitos, proposta originalmente por Coda (2003), utiliza a descrição Lagrangeana. A formulação padrão do MEF para sólidos é o Método dos Deslocamentos (Bathe, 2006), no qual as incógnitas fundamentais são os deslocamentos dos nós. Na formulação Posicional, diferentemente, as incógnitas são as posições nodais. Essa formulação é classificada como Lagrangeana Total (Bathe, 2006; Wong e Tin-Loi, 1990).

A tendência atual de utilização de estruturas mais esbeltas e com maior resistência torna a análise de estabilidade um assunto de fundamental importância (Greco e Venturin, 2006). Este trabalho fornece um estudo de estruturas reticuladas planas compostas por barras biarticuladas e com comportamento não linear geométrico por meio da utilização de três formulações de elementos finitos de barra: Corrotacional (Crisfield, 1991; Yaw, 2009); Posicional (Coda, 2003; Coda e Greco, 2004); e de Crisfield (1991). O sistema de equações não lineares, que descreve o problema estrutural, é solucionado por intermédio de um procedimento incremental-iterativo baseado no método de Potra-Pták (1984) e desenvolvido por Souza et al. (2018), o qual é associado à técnica de continuação Norma Mínima dos Deslocamentos Residuais.

Um código computacional com o programa livre Scilab - versão 6.1.1 (Scilab, 2021) é desenvolvido e o comportamento não linear das estruturas é descrito por suas trajetórias de equilíbrio no espaço deslocamento – carga. Essas trajetórias são obtidas para um determinado grau de liberdade da discretização e envolvem fenômenos de aumento de deslocamentos com decréscimo de cargas ou mesmo decréscimo de deslocamentos com decréscimo de cargas. Os resultados numéricos de simulações de problemas encontrados na literatura mostram que a solução aproximada, para uma dada tolerância, é obtida pela formulação Posicional com menos passos de carga e menos iterações acumuladas até a convergência.

2. Formulações de elementos finitos de treliça 2D

Nesta seção são apresentadas as formulações não lineares de elementos finitos de treliça plana implementadas neste trabalho: Corrotacional (Crisfield, 1991; Yaw, 2009); Posicional (Coda, 2003; Coda e Greco, 2004); e de Crisfield (1991). Considera-se que o elemento de barra transmite somente forças axiais e tem área da seção transversal constante A . Supõe-se que todos os elementos permanecem no regime elástico linear.

Os elementos de treliça possuem quatro graus de liberdade no sistema local de coordenadas cartesianas (X_1, Y_1) , sendo dois por nó, correspondentes aos deslocamentos na direção do eixo da barra e transversal a ele.

2.1 Formulação Corrotacional de Elementos Finitos

As coordenadas cartesianas globais (X_1, Y_1) e (X_2, Y_2) referentes aos nós “1” e “2”, respectivamente, representam a configuração inicial do elemento, sendo conhecidas também como coordenadas de referência. Após uma mudança de configuração devido a deslocamentos da treliça,

a mesma passa a ter novas coordenadas (x_1, y_1) e (x_2, y_2) , conforme o desenho esquemático na Figura 2. O comprimento inicial (ou referencial) L_0 e o comprimento atual L da barra são calculados, respectivamente, por (Yaw, 2009):

$$L_0 = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2}, \quad (1)$$

$$L = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}, \quad (2)$$

em que $x_i = X_i + u_i$ e $y_i = Y_i + v_i$, com $i = 1, 2$, sendo u_i os deslocamentos horizontais e v_i os deslocamentos verticais no sistema global de coordenadas cartesianas (X, Y) .

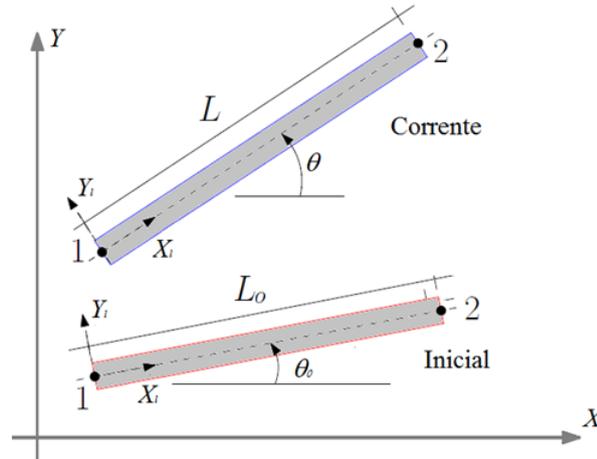


Figura 2 - Configurações inicial e corrente do elemento de treliça. Fonte: adaptada de Yaw (2009).

As coordenadas globais permanecem fixas na formulação Corrotacional. O ângulo corrente do elemento corrotacionado com relação ao sistema de coordenadas globais é denotado por θ . Na formulação bidimensional, os valores do seno e cosseno desse ângulo são determinados, respectivamente, por (Yaw, 2009):

$$\cos(\theta) = \frac{(X_2 + u_2) - (X_1 + u_1)}{L}, \quad (3)$$

$$\sin(\theta) = \frac{(Y_2 + v_2) - (Y_1 + v_1)}{L}. \quad (4)$$

Considere $c = \cos(\theta)$ e $s = \sin(\theta)$. O vetor de força interna elementar \mathbf{F}_{elem} é avaliado pela seguinte expressão:

$$\mathbf{F}_{\text{elem}} = \frac{NL}{L_0} \mathbf{r}, \quad (5)$$

na qual $\mathbf{r} = [-c \quad -s \quad c \quad s]^T$ e N é a força axial interna local dada por:

$$N = EA\varepsilon_G, \quad (6)$$

em que EA é a rigidez axial e ε_G é a deformação de Green-Lagrange dada pela expressão:

$$\varepsilon_G = \frac{L^2 - L_0^2}{2L_0^2}. \quad (7)$$

A matriz de rigidez elementar \mathbf{K}_{elem} é composta por dois termos (Yaw, 2009):

$$\mathbf{K}_{\text{elem}} = \mathbf{K}_{\text{M}} + \mathbf{K}_{\text{G}}, \quad (8)$$

sendo \mathbf{K}_{M} a matriz de rigidez material e \mathbf{K}_{G} a matriz de rigidez geométrica, que são determinadas, nessa ordem, por:

$$\mathbf{K}_{\text{M}} = \frac{EA}{2L_0} \left(3 \frac{L^2}{L_0^2} - 1 \right) \mathbf{r}\mathbf{r}^T, \quad (9)$$

$$\mathbf{K}_{\text{G}} = \frac{N}{L_0} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_2 & -\mathbf{I}_2 \\ -\mathbf{I}_2 & \mathbf{I}_2 \end{bmatrix}. \quad (10)$$

em que \mathbf{I}_2 é a matriz identidade de ordem 2.

2.2 Formulação Posicional de Elementos Finitos

Na formulação Posicional do MEF (Coda, 2003; Coda e Greco, 2004), a matriz de rigidez tangente \mathbf{K}_{elem} e o vetor de forças internas \mathbf{F}_{elem} elementares são obtidos conforme as equações, respectivamente:

$$\mathbf{K}_{\text{elem}} = \frac{EA}{L_0^3} \mathbf{B} + \frac{EA\varepsilon_G}{L_0} \mathbf{C}, \quad (11)$$

$$\mathbf{F}_{\text{elem}} = \frac{EA\varepsilon_G}{L_0} \mathbf{m}, \quad (12)$$

sendo ε_G calculo conforme a Equação (7). Os comprimentos L_0 e L são determinados de acordo com as Equações (1) e (2), respectivamente. Na Equação (11), as matrizes \mathbf{B} e \mathbf{C} são definidas, respectivamente, por:

$$\mathbf{B} = \mathbf{m}\mathbf{m}^T, \quad (13)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_2 & -\mathbf{I}_2 \\ -\mathbf{I}_2 & \mathbf{I}_2 \end{bmatrix}, \quad (14)$$

em que o vetor $\mathbf{m} = [x_1-x_2 \ y_1-y_2 \ x_2-x_1 \ y_2-y_1]^T$. O vetor de deslocamentos na iteração $(k+1)$ $\mathbf{u}^{(k+1)}$ é determinado pela equação:

$$\mathbf{u}^{(k+1)} = \mathbf{d}^{(k+1)} - {}^0\mathbf{d}, \quad (15)$$

na qual ${}^0\mathbf{d}$ é o vetor de coordenadas nodais no passo de carga inicial (estrutura indeformada) e $\mathbf{d}^{(k+1)}$ é o vetor de coordenadas nodais na iteração corrente.

2.3 Formulação proposta por Crisfield (1991)

A formulação proposta por Crisfield (1991) é obtida a partir do Princípio dos Trabalhos Virtuais. Considerando o tensor de deformação de Green-Lagrange, obtém-se o vetor de força interna \mathbf{F}_{elem} (Pinheiro, 2003):

$$\mathbf{F}_{\text{elem}} = \frac{EA\varepsilon_G}{L_0} [-\Delta x - \Delta u \quad -\Delta y - \Delta v \quad \Delta x + \Delta u \quad \Delta y + \Delta v]^T, \quad (16)$$

na qual $\Delta x = X_2 - X_1$, $\Delta y = Y_2 - Y_1$, $\Delta u = u_2 - u_1$ e $\Delta v = v_2 - v_1$. A matriz de rigidez \mathbf{K}_{elem} é dada pela soma das seguintes parcelas:

$$\mathbf{K}_{elem} = \mathbf{K}_{t1} + \mathbf{K}_{t2a} + \mathbf{K}_{t2a}^T + \mathbf{K}_{t2b} + \mathbf{K}_{\sigma}, \quad (17)$$

em que

$$\mathbf{K}_{t1} = \frac{EA}{8\alpha_0^3} \begin{bmatrix} \Delta x^2 & \Delta x\Delta y & -\Delta x^2 & -\Delta x\Delta y \\ \Delta x\Delta y & \Delta y^2 & -\Delta x\Delta y & -\Delta y^2 \\ -\Delta x^2 & -\Delta x\Delta y & \Delta x^2 & \Delta x\Delta y \\ -\Delta x\Delta y & -\Delta y^2 & \Delta x\Delta y & \Delta y^2 \end{bmatrix}, \quad (18)$$

$$\mathbf{K}_{t2a} = \frac{EA}{8\alpha_0^3} \begin{bmatrix} \Delta x\Delta u & \Delta x\Delta v & -\Delta x\Delta u & -\Delta x\Delta v \\ \Delta y\Delta u & \Delta y\Delta v & -\Delta y\Delta u & -\Delta y\Delta v \\ -\Delta x\Delta u & -\Delta x\Delta v & \Delta x\Delta u & \Delta x\Delta v \\ -\Delta y\Delta u & -\Delta y\Delta v & \Delta y\Delta u & \Delta y\Delta v \end{bmatrix}, \quad (19)$$

$$\mathbf{K}_{t2b} = \frac{EA}{8\alpha_0^3} \begin{bmatrix} \Delta u^2 & \Delta u\Delta v & -\Delta u^2 & -\Delta u\Delta v \\ \Delta u\Delta v & \Delta v^2 & -\Delta u\Delta v & -\Delta v^2 \\ -\Delta u^2 & -\Delta u\Delta v & \Delta u^2 & \Delta u\Delta v \\ -\Delta u\Delta v & -\Delta v^2 & \Delta u\Delta v & \Delta v^2 \end{bmatrix}, \quad (20)$$

$$\mathbf{K}_{t\sigma} = \frac{EA\varepsilon_G}{2\alpha_0} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_2 & -\mathbf{I}_2 \\ -\mathbf{I}_2 & \mathbf{I}_2 \end{bmatrix}, \quad (21)$$

$$\alpha_0 = \frac{L_0}{2}. \quad (22)$$

3. Procedimento incremental e iterativo para a solução do problema estrutural

O sistema de equações não lineares que descreve o equilíbrio estático de um sistema estrutural com não linearidade geométrica é descrito por (Maximiano et al., 2014; Souza et al., 2022):

$$\mathbf{g}(\mathbf{u}, \lambda) = \lambda \mathbf{F}_r - \mathbf{F}_{int}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}, \quad (23)$$

na qual \mathbf{g} é o vetor de forças desequilibradas, \mathbf{F}_{int} é o vetor de forças internas (avaliado em função do vetor de deslocamentos nodais \mathbf{u}) e λ é o parâmetro de carga responsável pelo escalonamento do vetor de forças externas \mathbf{F}_r . O sistema dado em Equação (23) tem $(n + 1)$ incógnitas, que são o vetor \mathbf{u} com n elementos e o parâmetro λ , mas somente n equações. Assim, para que a solução seja possível, uma equação de restrição $c(\mathbf{u}, \lambda) = 0$ é adicionada ao sistema.

A solução aproximada desse sistema é obtida por meio de um procedimento incremental e iterativo em que, para uma sequência do parâmetro de carga λ , determina-se uma sequência do correspondente incremento de deslocamentos \mathbf{u} . O método iterativo de dois passos de Potra e Pták (1984), o qual foi desenvolvido para encontrar uma raiz aproximada de uma função não linear do tipo $f(x) = 0$, foi adaptado num procedimento incremental por Souza et al. (2018), cujas equações iterativas são (Souza et al., 2022):

$$\mathbf{y}^{(k+1)} = \mathbf{u}^{(k)} + \delta \mathbf{u}_1^{(k+1)}, \quad (24)$$

$$\delta \mathbf{u}_1^{(k+1)} = \delta \lambda_1^{(k+1)} \delta \mathbf{u}_r^{(k+1)} + \delta \mathbf{u}_g^{(k+1)}, \quad (25)$$

$$\delta \mathbf{u}_2^{(k+1)} = \delta \lambda_2^{(k+1)} \delta \mathbf{u}_r^{(k+1)} + \delta \mathbf{u}_{gy}^{(k+1)}, \quad (26)$$

$$\mathbf{u}^{(k+1)} = \mathbf{u}^{(k)} + \delta \mathbf{u}_1^{(k+1)} + \delta \mathbf{u}_2^{(k+1)}, \quad (27)$$

$$\lambda^{(k+1)} = \lambda^{(k)} + \delta \lambda_2^{(k+1)}, \quad (28)$$

sendo $\delta \mathbf{u}_i$, com $i = 1, 2$, o subincremento do vetor de deslocamentos. Os vetores $\delta \mathbf{u}_r^{(k+1)}$, $\delta \mathbf{u}_g^{(k+1)}$ e $\delta \mathbf{u}_{gy}^{(k+1)}$ são calculados por, respectivamente:

$$\delta \mathbf{u}_r^{(k+1)} = [\mathbf{K}(\mathbf{u}^{(k)})]^{-1} \mathbf{F}_r, \quad (29)$$

$$\delta \mathbf{u}_g^{(k+1)} = [\mathbf{K}(\mathbf{u}^{(k)})]^{-1} \mathbf{g}(\mathbf{u}^{(k)}, \lambda^{(k)}), \quad (30)$$

$$\delta \mathbf{u}_{gy}^{(k+1)} = [\mathbf{K}(\mathbf{u}^{(k)})]^{-1} \mathbf{g}(\mathbf{y}^k, \lambda^{(k)}). \quad (31)$$

O superíndice $(k + 1)$ nessas equações indica a iteração corrente e (k) indica a iteração anterior, no passo de carga atual. Ao longo do processo iterativo, a determinação da correção do subincremento de carga ($\delta \lambda$) é função de uma dada estratégia de iteração ou equação de restrição imposta ao problema. Uma boa estratégia de controle de iteração deve ser eficiente computacionalmente, de maneira a identificar o ponto limite e ultrapassá-lo na trajetória de equilíbrio.

A técnica de continuação utilizada é a proposta por Chan (1988), sendo denominada de Norma Mínima dos Deslocamentos Residuais (NMDR). Nessa técnica, procura-se eliminar diretamente os deslocamentos residuais (deslocamentos iterativos) devidos às forças desequilibradas. As correções dos subincrementos de carga no ciclo iterativo, $\delta \lambda_i^{(k+1)}$, com $i = 1, 2$, são determinados por:

$$\delta \lambda_1^{(k+1)} = - \frac{\delta \mathbf{u}_r^{(k+1)T} \delta \mathbf{u}_g^{(k+1)}}{\delta \mathbf{u}_r^{(k+1)T} \delta \mathbf{u}_r^{(k+1)}}, \quad (32)$$

$$\delta \lambda_2^{(k+1)} = - \frac{\delta \mathbf{u}_r^{(k+1)T} \delta \mathbf{u}_{gy}^{(k+1)}}{\delta \mathbf{u}_r^{(k+1)T} \delta \mathbf{u}_r^{(k+1)}}. \quad (33)$$

O vetor incremento de deslocamento $\Delta \mathbf{u}^{(k+1)}$ é determinado pela expressão:

$$\Delta \mathbf{u}^{(k+1)} = \Delta \mathbf{u}^{(k)} + \delta \mathbf{u}_1^{(k+1)} + \delta \mathbf{u}_2^{(k+1)}. \quad (34)$$

A equação para o incremento inicial do parâmetro de carga é dada por (solução predita):

$$\Delta \lambda^{(0)} = \frac{\Delta l}{\|\delta \mathbf{u}_r\|}, \quad (35)$$

em que Δl representa o incremento de comprimento de arco. Esse incremento pode ser utilizado como um parâmetro de controle no passo de carga corrente de acordo com a expressão (Crisfield, 1991):

$$\Delta l = {}^0 \Delta l \left(\frac{k_d}{t_k} \right)^{0,5}, \quad (36)$$

na qual ${}^0 \Delta l$ representa o incremento inicial de comprimento de arco no passo de carga inicial, k_d é o número desejável de iterações para a convergência do processo iterativo corrente e t_k é o número de iterações que foi necessário para convergir no passo de carga anterior. Na Figura 3 é apresentado o algoritmo referente ao procedimento incremental-iterativo baseado no método de Potra-Pták associado à técnica NMDR.

O algoritmo e as equações iterativas do método de Potra-Pták utilizando a formulação Posicional do MEF podem ser encontrados nas referências Souza et al. (2017) e Souza et al. (2018).

Nesse caso, o vetor de coordenadas nodais \mathbf{d} e o parâmetro de carga λ são utilizados como incógnitas do problema estrutural, e o vetor de deslocamentos \mathbf{u} na iteração $(k+1)$ é obtido conforme a Equação (15).

Entrada: $\mathbf{u} \leftarrow \mathbf{0}$, ΔP , ${}^0\Delta l$, k_d , tol , $n_{m\acute{a}x}$, $k_{m\acute{a}x}$
 Saída: \mathbf{u} , k_{total} , NP , t , $k_{m\acute{e}dio}$

1. $\Delta \mathbf{u} \leftarrow \mathbf{0}$, $\lambda \leftarrow 0$, $k_{m\acute{a}x} \leftarrow 0$
2. Para $NP \leftarrow 1, \dots, n_{m\acute{a}x}$ faça
3. $\delta \mathbf{u}_r \leftarrow [\mathbf{K}(\mathbf{u})]^{-1} \mathbf{F}_r(\Delta P)$ //Solução predita
4. $\Delta \lambda \leftarrow \Delta l / \|\delta \mathbf{u}_r\|$
5. Se $\Delta \mathbf{u}^T \delta \mathbf{u}_r < 0$ então
6. $\Delta \lambda \leftarrow -\Delta \lambda$
7. Fim-Se
8. $\Delta \mathbf{u}^{(0)} \leftarrow \Delta \lambda \delta \mathbf{u}_r$
9. $\Delta \mathbf{u} \leftarrow \Delta \mathbf{u}^{(0)}$
10. $\mathbf{g} \leftarrow (\lambda + \Delta \lambda) \mathbf{F}_r(\Delta P) - \mathbf{F}_{int}(\mathbf{u} + \Delta \mathbf{u})$
11. Para $k \leftarrow 1, \dots, k_{m\acute{a}x}$ faça //Ciclo iterativo
12. $\delta \mathbf{u}_g \leftarrow [\mathbf{K}(\mathbf{u} + \Delta \mathbf{u})]^{-1} \mathbf{g}$
13. $\delta \mathbf{u}_r \leftarrow [\mathbf{K}(\mathbf{u} + \Delta \mathbf{u})]^{-1} \mathbf{F}_r(\Delta P)$
14. $\delta \lambda_1 \leftarrow -(\delta \mathbf{u}_r^T \delta \mathbf{u}_g) / (\delta \mathbf{u}_r^T \delta \mathbf{u}_r)$
15. $\delta \mathbf{u}_1 \leftarrow \delta \mathbf{u}_g + \delta \lambda_1 \delta \mathbf{u}_r$ //Passo 1
16. $\mathbf{y}^k \leftarrow \mathbf{u} + \Delta \mathbf{u} + \delta \mathbf{u}_1$
17. $\mathbf{g} \leftarrow (\lambda + \Delta \lambda) \mathbf{F}_r(\Delta P) - \mathbf{F}_{int}(\mathbf{y}^k)$
18. $\delta \mathbf{u}_{gy} \leftarrow [\mathbf{K}(\mathbf{u} + \Delta \mathbf{u})]^{-1} \mathbf{g}$
19. $\delta \mathbf{u}_2 \leftarrow \delta \mathbf{u}_{gy} + \delta \lambda_2 \delta \mathbf{d}_r$ //Passo 2
20. $\delta \lambda_2 \leftarrow -(\delta \mathbf{u}_r^T \delta \mathbf{u}_{gy}) / (\delta \mathbf{u}_r^T \delta \mathbf{u}_r)$
21. $\Delta \mathbf{u} \leftarrow \Delta \mathbf{u} + \delta \mathbf{u}_1 + \delta \mathbf{u}_2$
22. $\Delta \lambda \leftarrow \Delta \lambda + \delta \lambda_2$
23. $\mathbf{g} \leftarrow (\lambda + \Delta \lambda) \mathbf{F}_r(\Delta P) - \mathbf{F}_{int}(\mathbf{u} + \Delta \mathbf{u})$
24. Se $\|\mathbf{g}\| < tol_1 \|\mathbf{F}_r(\Delta P)\|$ ou $\|\delta \mathbf{u}_2\| < tol_2 \|\Delta \mathbf{u}\|$ então
25. Terminar a execução do Para
26. Fim-Se
27. Fim-Para
28. $\mathbf{u} \leftarrow \mathbf{u} + \Delta \mathbf{u}$
29. $\lambda \leftarrow \lambda + \Delta \lambda$
30. $\Delta l \leftarrow {}^0\Delta l (k_d/k)^{0,5}$
31. $k_{total} \leftarrow k_{total} + k$
32. Fim-Para
33. $k_{m\acute{e}dio} \leftarrow k_{total} / NP$

Figura 3 – Procedimento incremental-iterativo baseado no método de Potra-Pták associado à técnica NMDR.

4. Resultados numéricos

Nesta seção, três exemplos numéricos de estruturas planas com barras biarticuladas são apresentados. O primeiro consiste de uma estrutura com três barras biarticuladas proposta por Habibi e Bidmeshki (2018), o segundo trata-se de uma treliça assimétrica em forma de arco estudada por Yang e Kuo (1994) e o terceiro, um arco treliçado raso estudado por Zhu et al (1994). Supõe-se que a relação constitutiva dos materiais é elástica linear, ou seja, segue a Lei de Hooke.

Para as análises não lineares geométricas e a geração das trajetórias de equilíbrio, é desenvolvido um código computacional com o programa livre Scilab, versão 6.1.1 (Scilab, 2021). Como o objetivo é comparar as formulações não lineares de elemento de treliça 2D implementadas aqui, as unidades dos problemas foram mantidas as mesmas das referências originais. Os pontos de equilíbrio nas trajetórias das estruturas obtidas pelos autores das referências supracitadas são conseguidos por meio do programa Pega Ponto 1.0 (2006).

Considera-se como critério de parada das análises não lineares (interrupção das simulações) quando o deslocamento vertical v num nó previamente selecionado da malha de elementos finitos da estrutura for maior que um deslocamento vertical máximo $v_{m\acute{a}x}$.

4.1 Estrutura com três barras biarticuladas

Um problema de uma estrutura com três barras biarticuladas e quatro nós, mostrada na Figura 4, é considerado neste exemplo. As barras têm módulo de elasticidade $E = 2,06 \times 10^7$ N/cm². A Figura 5 mostra as trajetórias de equilíbrio (curvas deslocamento vertical no nó 4 versus carga P) com dois pontos limites de força e dois pontos limites de deslocamento, havendo boa concordância com os pontos de equilíbrio obtidos por Habibi e Bidmeshki (2018). Os resultados numéricos (NP, k_{total} , $k_{m\acute{e}dio}$ e t) são apresentados na Tabela 1. As simulações são realizadas com os seguintes parâmetros para o método de Potra-Pták associado à técnica NMDR: $tol_1 = tol_2 = 1,0 \times 10^{-7}$; ${}^0\Delta l = 5,0$; $k_d = 5$; $k_{m\acute{a}x} = 150$; e $\Delta P = 1,0$ N. Para o fim das simulações, considera-se $v_{m\acute{a}x} = 180$ cm no nó 4.

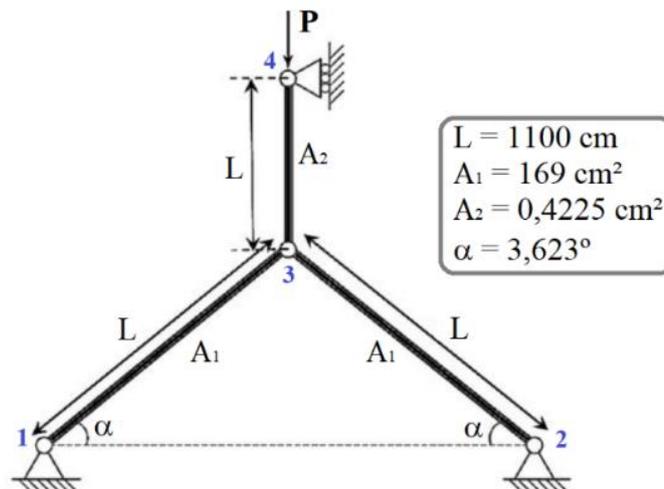


Figura 4 – Estrutura com três barras biarticuladas: modelo estrutural.

Tabela 1 – Estrutura com três barras biarticuladas: resultados numéricos (número de incógnitas do sistema de equações: 9).

Formulação	NP	k_{total}	$k_{m\acute{e}dio}$	t (s)
Corrotacional	47	157	3,3404	0,3805
Posicional	38	76	2,0000	0,2428
Crisfield (1991)	41	103	2,5121	0,2960

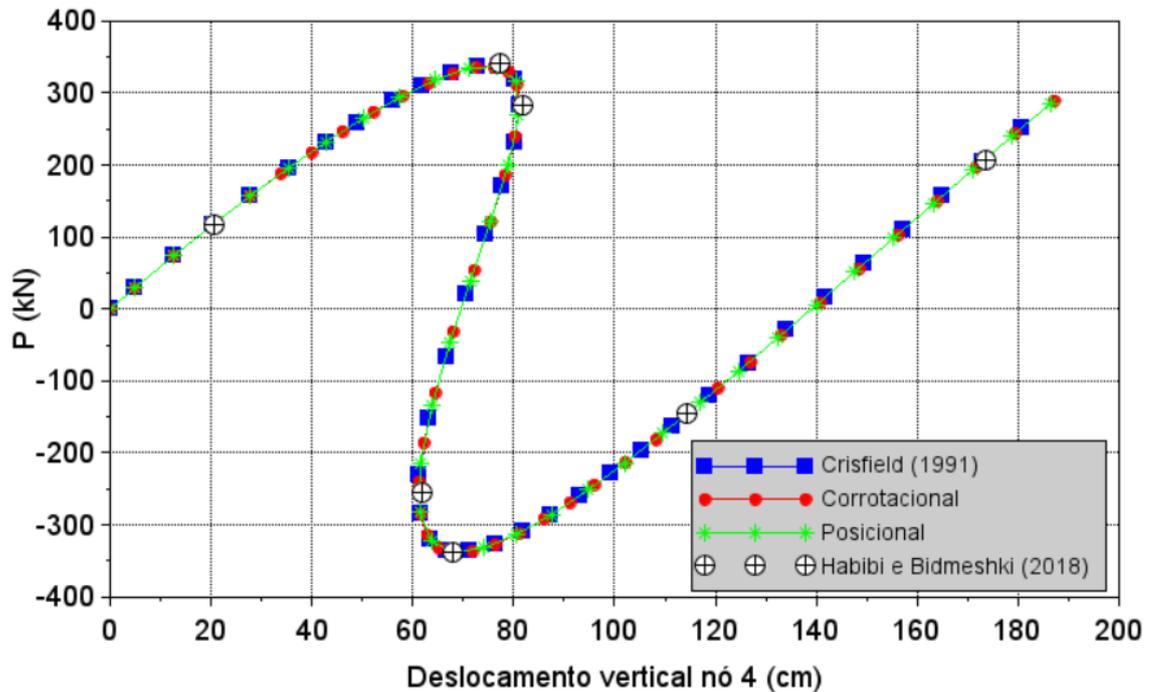


Figura 5 – Estrutura com três barras biarticuladas: trajetórias de equilíbrio.

4.2 Treliça assimétrica plana em forma de arco

Seja a treliça assimétrica em forma de arco mostrada na Figura 6 com 18 nós e 33 elementos de barra. Este exemplo é de particular interesse uma vez que sua trajetória de equilíbrio é complexa e exibe quatro pontos limites de força e dois pontos limites de deslocamento. As barras têm rigidez axial adimensional $EA = 9,0 \times 10^6$. Na Figura 7 são apresentadas as trajetórias de equilíbrio (deslocamento vertical do nó 5 *versus* força P) obtidas com as formulações implementadas, havendo boa concordância com os pontos de equilíbrio encontrados por Yang e Kuo (1994). Na Tabela 2 são mostrados os resultados numéricos (NP, k_{total} , $k_{médio}$ e t). São adotados os seguintes parâmetros para o método de solução: $tol_1 = tol_2 = 1,0 \times 10^{-7}$; ${}^0\Delta l = 2,0$; $k_d = 4$; $k_{máx} = 150$; e $\Delta P = 100$. Para o fim das simulações, considera-se $v_{máx} = 16,5$ no nó 5.

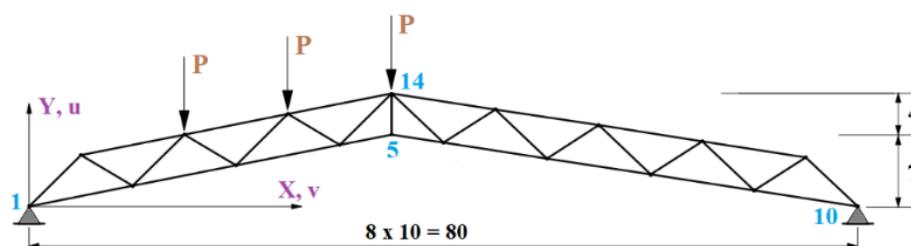


Figura 6 – Treliça assimétrica plana em forma de arco: modelo estrutural.

Tabela 2 – Treliça assimétrica plana em forma de arco: resultados numéricos (número de incógnitas do sistema de equações: 37).

Formulação	NP	k_{total}	$k_{médio}$	t (s)
Corrotacional	32	143	4,4687	2,9529
Posicional	23	53	2,3043	1,2465
Crisfield (1991)	28	91	3,2500	2,2010

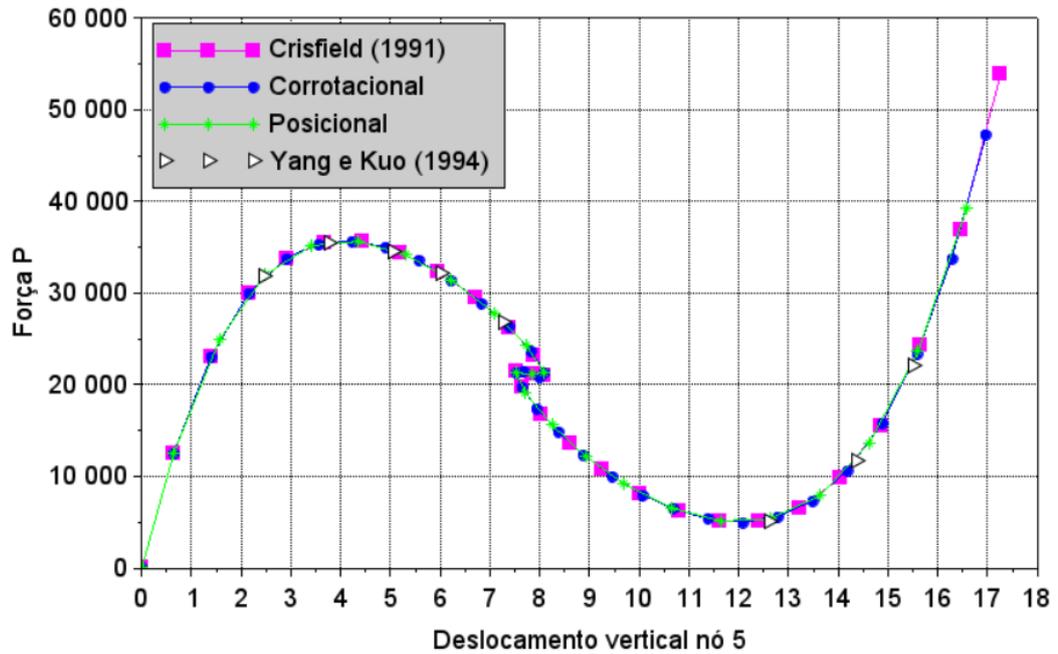
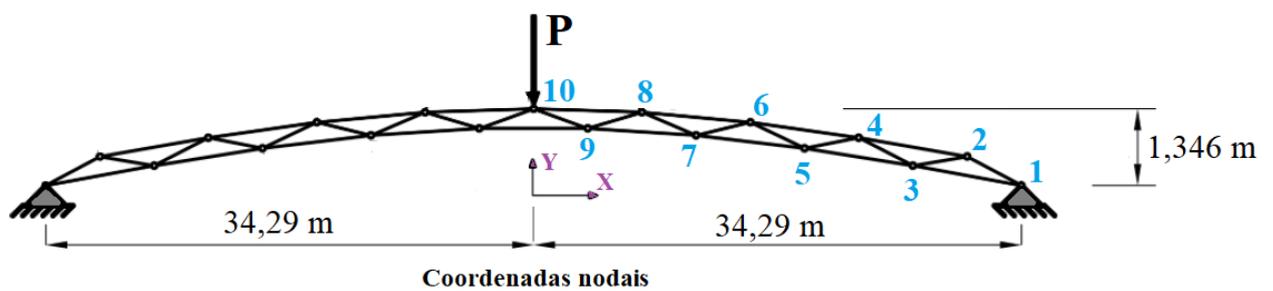


Figura 7 – Treliça assimétrica plana em forma de arco: trajetórias de equilíbrio.

4.3 Arco treliçado raso

Considere o arco treliçado raso biapoiado na Figura 8, proposto por Zhu et al (1994), com 19 nós e 35 barras e sujeito a uma força vertical P. As propriedades da seção transversal das barras são: módulo de elasticidade $E = 7,17 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$, área dos banzos inferior e superior $A = 1,60 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ e área das diagonais $A = 1,30 \times 10^{-4} \text{ m}^2$. As coordenadas nodais de parte da estrutura estão apresentadas na Figura 8, visto que a treliça é simétrica. As análises foram realizadas com os seguintes parâmetros para o método de solução: $tol_1 = tol_2 = 1,0 \times 10^{-7}$; ${}^0\Delta l = 0,1$; $k_d = 5$; $k_{m\acute{a}x} = 150$; e $\Delta P = 1,0 \text{ N}$. As trajetórias de equilíbrio (curvas deslocamento vertical no nó 10 versus carga P) obtidas com os elementos de barra implementados são apresentadas na Figura 9, comparando-as com os pontos de equilíbrio obtidos por Zhu et al. (1994). Para o fim das simulações, considera-se $v_{m\acute{a}x} = 3,0 \text{ m}$ no nó 10. Na Tabela 3 são mostrados os resultados numéricos (NP, k_{total} , $k_{m\acute{e}dio}$ e t)



Coordenadas nodais

nó	X (cm)	Y (cm)	nó	X (cm)	Y (cm)
1	3429	0	6	1524	110,85
2	3048	50,65	7	1143	87,99
3	2667	34,75	8	762	128,5
4	2286	83,82	9	381	100,05
5	1905	65,3	10	0	134,6

Figura 8 – Arco treliçado raso: modelo estrutural.

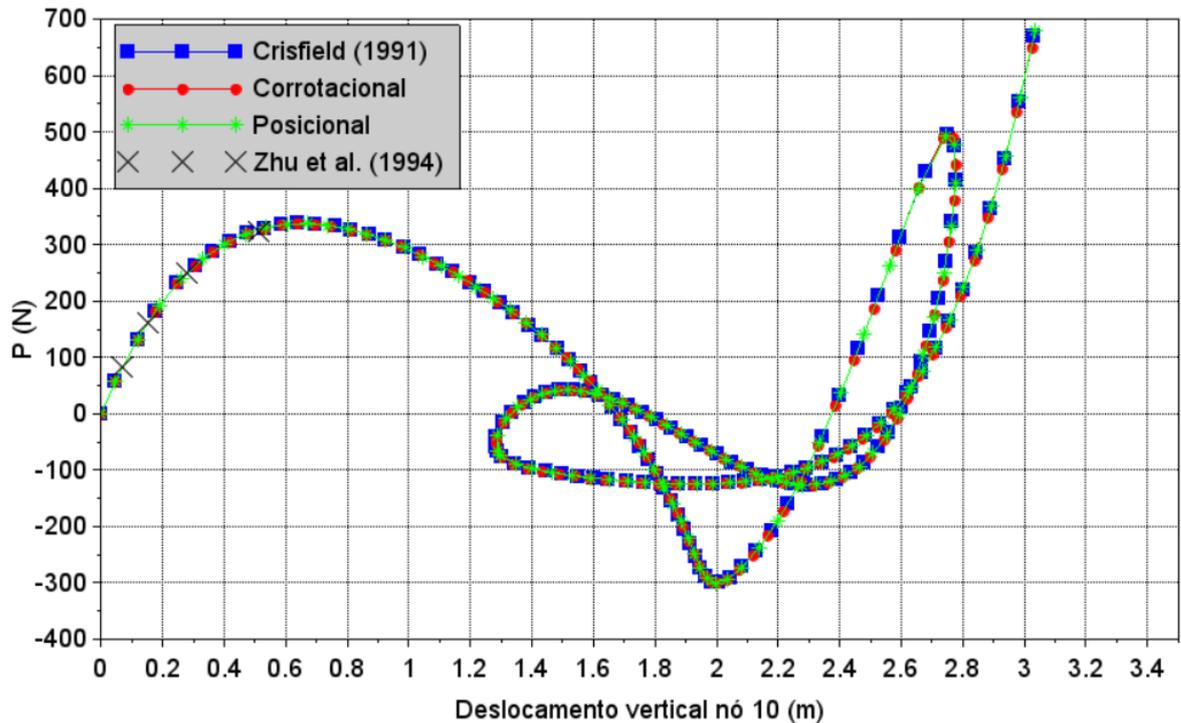


Figura 9 – Arco treçado raso: trajetórias de equilíbrio.

Tabela 3 – Arco treçado raso: resultados numéricos (número de incógnitas do sistema de equações: 39).

Formulação	NP	k_{total}	$k_{médio}$	t (s)
Corrotacional	138	375	2,7173	9,0875
Posicional	125	268	2,1440	6,2491
Crisfield (1991)	137	364	2,6569	9,2083

4.3 Discussão dos resultados numéricos

Na análise não linear geométrica o equilíbrio estático é estabelecido na configuração deformada da estrutura, ou seja, levando-se em conta os deslocamentos e as deformações ocorridos. As alterações na geometria da estrutura podem levar à perda de estabilidade do equilíbrio devido ao aparecimento de pontos limites. Cada ponto sobre a trajetória representa uma configuração de equilíbrio. Os pontos limites de carga (ou de força) são caracterizados por apresentarem uma tangente horizontal (paralela ao eixo do deslocamento) no gráfico da trajetória, enquanto que os pontos limites de deslocamento apresentam tangente vertical (paralela ao eixo da carga).

Vê-se que a rigidez das barras das treças é alterada mesmo que o material estrutural apresente um comportamento elástico puramente linear. A matriz de rigidez global do sistema estrutural é constante na análise elástica linear e, após a aplicação de um carregamento, os deslocamentos nos nós da estrutura podem ser determinados com um único passo de carga. Se os elementos dessa matriz dependem das forças do elemento e dos deslocamentos dos membros estruturais, a relação carga-deslocamento torna-se não linear e o deslocamento não pode ser determinado em uma única etapa. Portanto, é necessário um procedimento incremental-iterativo de solução para traçar o caminho de equilíbrio não linear da estrutura.

Observa-se que as formulações Corrotacional, Posicional e de Crisfield (1991) obtêm as trajetórias de equilíbrio completas com pontos limites de força e de deslocamento das estruturas, havendo boa concordância com os resultados fornecidos pela literatura, conforme as Figuras 5, 7 e 9. Nota-se que para os primeiros pontos de equilíbrio nas trajetórias, em que os deslocamentos ainda são pequenos, são praticamente coincidentes para todas as formulações.

Verifica-se que a formulação Posicional foi mais eficiente computacionalmente do que as demais formulações para todas as análises quanto ao tempo de processamento, visto que obteve as

soluções aproximadas com menos passos de carga e menos iterações acumuladas até a convergência, de acordo com os resultados numéricos apresentados nas Tabelas 1, 2 e 3.

Metodologias eficientes de solução do sistema de equações não lineares devem ser capazes de percorrer todo o caminho de equilíbrio do sistema estrutural em análise, identificando e passando por todos os pontos singulares ou críticos que possam existir (Leon et al., 2011).

A metodologia utilizada neste trabalho se baseia primordialmente na solução do sistema de equações dado pela Equação (23) e pela equação de restrição $c(\mathbf{u}, \lambda) = 0$ de maneira incremental e iterativa. Num contexto computacional, para um dado passo de carga, esse processo é resumido em duas etapas: solução incremental predita com aproximações para $\Delta\mathbf{u}^{(0)}$ e $\Delta\lambda^{(0)}$ (solução predita); e correção da solução incremental inicialmente proposta (ciclo iterativo). A sequência de correções é efetuada com o método de Potra-Pták até que a precisão desejada é obtida.

Na iteração do método de Potra-Pták, utiliza-se a mesma matriz de rigidez para a solução dos sistemas de equações lineares; assim, esses sistemas podem ser solucionados via decomposição (por exemplo, decomposição LU), visto que uma única fatoração no início da iteração é necessária. Observa-se que no ciclo iterativo são resolvidos três sistemas de equações lineares (linhas 12, 13 e 18 do algoritmo na Figura 3), uma atualização da matriz de rigidez global ($\mathbf{K}(\mathbf{u}+\Delta\mathbf{u})$) e duas atualizações do vetor de força interna ($\mathbf{F}_{int}(\mathbf{y}_k)$ e $\mathbf{F}_{int}(\mathbf{u}+\Delta\mathbf{u})$).

O procedimento utilizado para a mudança do sinal do subincremento inicial de carga $\Delta\lambda^{(0)}$ dado pelo produto escalar $\Delta\mathbf{u}^T \delta\mathbf{u}_r$ (linhas 5 a 7 do algoritmo na Figura 3) mostra-se eficiente, porque consegue identificar e ultrapassar os pontos limites existentes nas trajetórias de equilíbrio, com a definição da direção correta do parâmetro de carga. Além disso, o dispositivo para a verificação da mudança do sinal é de fácil implementação computacional.

5. Conclusão

Um dos principais objetivos da Engenharia Estrutural é tornar as estruturas mais econômicas, por meio da redução do seu peso próprio e consumo de materiais sem, no entanto, diminuir sua segurança e durabilidade. Assim, à proporção que o elemento estrutural se torna mais esbelto, a não linearidade geométrica se torna mais importante, e dá origem a vários fenômenos que não são encontrados em sistemas estruturais com comportamento linear.

Com o objetivo de validar a implementação computacional com o programa livre Scilab baseada nas formulações não lineares Corrotacional, Posicional e de Crisfield, foi efetuada a análise de três estruturas planas com barras biarticuladas com comportamento não linear geométrico existentes na literatura. Pôde-se constatar a concordância das trajetórias de equilíbrio com os pontos de equilíbrio fornecidos por outros autores.

A formulação Posicional foi mais eficiente no que diz respeito ao tempo de processamento, uma vez que obteve as soluções aproximadas dos problemas, para uma dada tolerância, com menos passos de carga e menos iterações acumuladas até a convergência.

Como pesquisa futura são sugeridos os seguintes temas: a inclusão da não linearidade física (modelos baseados na Mecânica do Dano e Elastoplasticidade) nas análises não lineares; a implementação de outras técnicas de continuação (Deslocamento Generalizado, Resíduo Ortogonal, entre outras); a inclusão do efeito da variação de temperatura; e a implementação de critérios de resistência.

Agradecimentos

Este estudo foi financiado pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) – Código financeiro 001.

Referências

- Bathe, K. J. (2006). *Finite Element Procedures*. Cambridge, MA, Klaus-Jurgen Bathe.
- Bidmeshki, S., & Habibi, A. (2021). A new procedure for post-buckling analysis of plane trusses using genetic algorithm. *Steel and Composite Structures*, 40(6), 817-828. doi: <https://doi.org/10.12989/scs.2021.40.6.817>
- Chan, S. L. (1988). Geometric and material non-linear analysis of beam-columns and frames using the minimum residual displacement method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 26(12), 2657-2669. doi: <https://doi.org/10.1002/nme.1620261206>
- Coda, H. B. (2003). *Análise não linear geométrica de sólidos e estruturas: uma formulação posicional baseada no MEF*. Tese de Doutorado (Texto complementar para concurso de professor titular), Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Paulo.
- Coda, H. B., & Greco, M. (2004). A simple FEM formulation for large deflection 2D frame analysis based on position description. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 193(33-35), 3541-3557. doi: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2004.01.005>
- Crisfield, M. A. (1991). *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*.
- Felipe, T. R., Leonel, E. D., Haach, V. G., & Beck, A. T. (2019). A comprehensive ductile damage model for 3D truss structures. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 112, 13-24. doi: <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2019.02.010>
- Greco, M., & Venturin, W. S. (2006). Stability analysis of three-dimensional trusses. *Latin American Journal of Solids and Structures*, 325-344.
- Habibi, A., & Bidmeshki, S. (2018). A dual approach to perform geometrically nonlinear analysis of plane truss structures. *Steel and Composite Structures*, 27(1), 13-25. doi: <https://doi.org/10.12989/scs.2018.27.1.013>
- Kzam, A. K. L. (2020). Determinação de pontos críticos na trajetória de equilíbrio não linear do elemento finito de treliça posicional. *REA - Revista da Estrutura de Aço*, 9(01), 1-20. doi: <https://dx.doi.org/10.17648/aco-2238-9377-9-1-6>
- Leon, S. E., Paulino, G. H., Pereira, A., Menezes, I. F., & Lages, E. N. (2011). A unified library of nonlinear solution schemes. *Applied Mechanics Reviews*, 64(4). doi: <https://doi.org/10.1115/1.4006992>
- Liu, M., Cao, D., Zhang, X., Wei, J., & Zhu, D. (2021). Nonlinear dynamic responses of beamlike truss based on the equivalent nonlinear beam model. *International Journal of Mechanical Sciences*, 194, 106197. doi: <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2020.106197>
- Matias Silva, W. T. (2002). El control variable de los desplazamientos en el análisis no lineal elástico de estructuras de barras. *Revista internacional de métodos numéricos*, 18(4), 549-572.
- Maximiano, D. P., Silva, A. R. D. D., & Silveira, R. A. D. M. (2014). Iterative strategies associated with the normal flow technique on the nonlinear analysis of structural arches. *Rem: Revista Escola de Minas*, 67, 143-150. doi: <https://doi.org/10.1590/S0370-44672014000200003>
- Maximiano, D. P., Silveira, R. A., Silva, A. R., & Gonçalves, P. B. (2019). An efficient strategy for solving structural nonlinear equations by combining the orthogonal residual method and normal flow technique. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 19(04), 1950039. doi: <https://doi.org/10.1142/S0219455419500391>
- Oliveira, L. D., Da Silva, W. A., Silva, W. T. M., & Delalibera, R. G. (2017). Análise dinâmica não linear geométrica de treliças planas. *REEC-Revista Eletrônica de Engenharia Civil*, 13(2). doi: <https://doi.org/10.5216/reec.v13i2.43626>
- Pega Ponto, versão 1.0. (2006). Laboratório de Modelagem, Simulação e Controle de Processos, Programa de Engenharia Química, COPPE, UFRJ.
- Pinheiro, L. (2003). *Análises Não-Lineares de Sistemas Estruturais Metálicos Rotulados e Semi-Rígidos*. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, Brasil.
- Pinheiro, L., & Silveira, R. A. D. M. (2004). Análise da estabilidade elástica de treliças espaciais. *Rem: Revista Escola de Minas*, 57, 85-92. doi: <https://doi.org/10.1590/S0370-44672004000200003>

- Potra, F. A., & Pták, V. (1984). *Nondiscrete induction and iterative processes* (Vol. 10). Pitman Advanced Publishing Program.
- Reddy, J. N. (2014). *An Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis Second Edition: with applications to heat transfer, fluid mechanics, and solid mechanics*. OUP Oxford.
- Scilab, versão 6.1.1. (2021). ESI Group.
- Souza, L. A. F., Castelani, E. V., Shirabayashi, W. V. I., Aliano Filho, A., & Machado, R. D. (2018). Trusses nonlinear problems solution with numerical methods of cubic convergence order. *TEMA (São Carlos)*, 19, 161-179. doi: <https://doi.org/10.5540/tema.2018.019.01.0161>
- Souza, L. A. F., Castelani, E. V., Shirabayashi, W. V. I., & Machado, (2017). Métodos iterativos de terceira e quarta ordem associados à técnica de comprimento de arco linear. *Ciência & Engenharia*, 26(1), 39-49. doi: <https://doi.org/10.14393/19834071.v26.n1.2017.38327>
- Souza, L. A. F., Doná Junior, W., & Silva, E. L. C. (2022). Two-step incremental procedure associated with the normal flow technique applied to trusses. *Semina - Ciências exatas e tecnológicas (Impresso)*, 29-40. doi: <https://doi.org/10.5433/1679-0375.2022v43n1Esp29>
- Stanić, A., Brank, B., & Korelc, J. (2016). On path-following methods for structural failure problems. *Computational Mechanics*, 58(2), 281-306. doi: <https://doi.org/10.1007/s00466-016-1294-y>
- Taylor Matias, W., & Mendes, L. (2009). Uma abordagem unificada da formulação co-rotacional para elementos de treliça 2D, treliça 3D e viga 2 D. *Revista Internacional de Métodos Numéricos*, 25(2), 163-190.
- Thai, H. T., & Kim, S. E. (2009). Large deflection inelastic analysis of space trusses using generalized displacement control method. *Journal of Constructional Steel Research*, 65(10-11), 1987-1994. doi: <https://doi.org/10.1016/j.jcsr.2009.06.012>
- Thai, H. T., & Kim, S. E. (2011). Nonlinear inelastic time-history analysis of truss structures. *Journal of Constructional Steel Research*, 67(12), 1966-1972. doi: <https://doi.org/10.1016/j.jcsr.2011.06.015>
- Torkamani, M. A., & Shieh, J. H. (2011). Higher-order stiffness matrices in nonlinear finite element analysis of plane truss structures. *Engineering Structures*, 33(12), 3516-3526. doi: <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2011.07.015>
- Wong, M. B., & Tin-Loi, F. (1990). Geometrically nonlinear analysis of elastic framed structures. *Computers & structures*, 34(4), 633-640. doi: [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(90\)90241-S](https://doi.org/10.1016/0045-7949(90)90241-S)
- Yang, Y. B., & Kuo, S. R. (1994). *Theory and analysis of nonlinear framed structures*.
- Yaw, L. L. (2009). *2D Corotational Beam Formulation*. Walla Walla University.
- Zhu, K., Al-Bermani, F. G. A., & Kitipornchai, S. (1994). Nonlinear dynamic analysis of lattice structures. *Computers & structures*, 52(1), 9-15. doi: [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(94\)90250-X](https://doi.org/10.1016/0045-7949(94)90250-X)