

## A Multipoint Flux Approximation Method Using Different Interpolation Strategies for Oil Reservoir Simulation

### Um Método de Aproximação de Fluxo por Múltiplos Pontos Utilizando Diferentes Estratégias de Interpolação para Simulação de Reservatórios de Petróleo

Article Info:

Article history: Received 2023-01-10 / Accepted 2023-02-17 / Available online 2023-02-17

doi: 10.18540/jcecv19iss1pp15415-01e



**Matheus Araújo Chaves**

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5605-9050>

Universidade Federal de Pernambuco, Brasil

E-mail: [matheus.araujochaves@ufpe.br](mailto:matheus.araujochaves@ufpe.br)

**Emanoel Rodrigues dos Santos**

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3840-0777>

Universidade Federal de Pernambuco, Brasil

E-mail: [emanoel.rsantos@ufpe.br](mailto:emanoel.rsantos@ufpe.br)

**Fernando Raul Licapa Contreras**

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6195-0788>

Universidade Federal de Pernambuco, Brasil

E-mail: [fernando.raul@ufpe.br](mailto:fernando.raul@ufpe.br)

#### Resumo

No presente trabalho, buscamos apresentar uma discretização robusta e acurada, baseada no método dos volumes finitos, da equação de pressão em reservatórios de petróleo com meios altamente heterogêneos e anisotrópicos, adotando malhas poligonais distorcidas. Esta metodologia de discretização é baseada em um método de aproximação de fluxo por múltiplos pontos com estêncil quase local (MPFA-QL). Este tipo de abordagem ocorre através de uma decomposição co-normal que determina o sentido físico do fluxo na superfície de controle. Assim, construímos os fluxos unilaterais para cada superfície de controle e, em seguida, obtemos uma expressão de fluxo único por meio de uma combinação convexa destes. Assim, as variáveis auxiliares localizadas nos vértices que definem as superfícies de controle são interpoladas utilizando diferentes estratégias de interpolação. Nosso objetivo é analisar e categorizar como a robustez e acurácia da solução numérica para a equação de pressão são influenciadas pelas diferentes estratégias de interpolação adotadas.

**Palavras-chave:** Simulação de reservatórios de petróleo. Escoamento monofásico. Estratégias de interpolação. Método de volumes finitos.

#### Abstract

In the present work, we seek to present a robust and accurate finite volume based on scheme discretization of the pressure equation for oil reservoirs in highly heterogeneous and anisotropic media, adopting distorted polygonal meshes. This discretization methodology is based on a multipoint flux approximation with a quasi-local stencil method (MPFA-QL). This type of approach occurs through a co-normal decomposition that determines the physical direction of the flux on the control surface. Thus, we build the one-sided flux for each control surface and then obtain a unique flux expression through a convex combination of these. Then, the auxiliary variables located at the vertex that define the control surfaces are interpolated using different interpolation strategies. Our

goal is to analyze and categorize how the robustness and accuracy of the numerical solution to the pressure equation are influenced by the different adopted interpolation strategies.

**Keywords:** Oil reservoirs simulation. Single-phase flow. Interpolation strategies; Finite volume method.

## 1. Introdução

Diversas aplicações da engenharia exemplificam os processos de difusão baseados em leis de conservação: o escoamento de fluidos em reservatórios de petróleo ou ainda a dinâmica de águas subterrâneas em aquíferos. Nesse sentido, conforme exposto por Hebert e Hubert (2008), esses fenômenos físicos são matematicamente descritos por um operador elíptico (equação de pressão) com um coeficiente de difusão (tensor de permeabilidade). Podendo este ser descontínuo e representado por um devido tensor que, geralmente, pode apresentar uma alta razão de anisotropia.

Para a solução analítica desses tipos de modelos matemáticos, existe uma complexidade associada aos parâmetros físicos envolvidos. Nesse aspecto, a empregabilidade e sofisticação dos métodos numéricos nas soluções dessas equações é fundamental para uma melhor previsão e compreensão dos fenômenos por parte do engenheiro de reservatórios.

A modelagem numérica da equação de pressão requer métodos de discretização confiáveis e abrangentes. Sendo assim, para o presente trabalho, estamos interessados em construir um método linear de volumes finitos centrado na célula para aproximação de fluxo por múltiplos pontos com estêncil quase local (MPFA-QL), sendo capaz de produzir soluções consistentes para meios altamente heterogêneos e anisotrópicos associados a malhas poligonais distorcidas. Originalmente, este método foi proposto por Contreras et al. (2019) para problemas de difusão em geral, essa metodologia numérica produz soluções exatas lineares quando a solução analítica é linear.

O fluxo único na superfície de controle é calculado a partir dos fluxos unilaterais correspondentes às células adjacentes à superfície de controle em questão. Assim, construímos os devidos fluxos unilaterais para cada célula independentemente, utilizando os teoremas do valor médio e da divergência. O fluxo em cada superfície de controle é explicitamente descrito por uma incógnita centrada na célula. Sendo essa definida nas células que compartilham a superfície de controle em questão e por duas incógnitas auxiliares definidas nos vértices, que não necessariamente pertencem à mesma superfície de controle compartilhada pelas células adjacentes.

Como em outros métodos de volumes finitos propostos, as devidas variáveis primárias são localizadas nos centros das células de interesse, enquanto as variáveis auxiliares podem estar situadas nos vértices e/ou nas superfícies de controle da devida malha computacional adotada. Conforme ilustrado em Yuan e Sheng (2008), as variáveis auxiliares devem ser interpoladas em função das variáveis primárias centradas na célula. Ao longo de diversos trabalhos publicados, nota-se que a escolha da localização dos pontos de interpolação influencia diretamente no estêncil do método numérico e, conseqüentemente, na sua acurácia e robustez.

Em Gao e Wu (2011) foram propostos dois métodos para interpolação dos vértices. O segundo deles, o chamado LPEW2, detém certas vantagens atreladas ao fato de não haver necessidade de sistema lineares locais para sua implementação, bem como possuir uma acurácia de segunda ordem. Esta metodologia é bastante robusta em meios anisotrópicos e malhas com ligeiro grau de distorção. É amplamente difundida e tem sido adotada para a simulação numérica do escoamento em reservatórios de petróleo por Contreras et al. (2016), onde os autores nomearam essa abordagem como MPFA-D. Entretanto, o interpolador LPEW2 (Linearity Preserving Explicit Weights 2) apresenta dificuldades em ser estendido para casos 3D, visto que sua derivação depende de que células que compartilham o mesmo vértice interior possam ser ordenadas pela sua vizinhança como um loop fechado. O que não é possível em malhas poliédricas. Um novo algoritmo interpolador que preserva linearidade foi proposto por Miao e Wu (2022), intitulado eLPEW2 (enriched LPEW2).

Este novo algoritmo melhora o desempenho computacional do LPEW2 clássico ao passo que sua derivação possibilita ser estendido facilmente para o caso 3D.

Outro esquema de interpolação clássico frequentemente utilizado é o proposto em Coudière et al. (1999), através de uma aproximação linear via mínimos quadrados, nomeada como LSW (Least Square Weights). Esse método possui uma simples implementação e pode facilmente ser estendido para devidos casos 3D. Entretanto, sabe-se que ele não leva em consideração o efeito do tensor de difusão, causando certa perda de precisão quando o tensor é descontínuo.

Nesse contexto, o presente trabalho detém interesse no estudo das estratégias de interpolação LPEW2, eLPEW2 e LSW. Almejando analisar de forma categórica e comparativa suas respectivas formulações numéricas e como essas estratégias nos ajudam na construção tanto do estêncil quanto do sistema matricial da simulação, bem como suas respectivas influências na solução numérica associada ao método MPFA-QL adotado

## 2. Metodologia

### 2.1 Modelo matemático

A equação que rege problemas de escoamento de fluidos monofásicos (equação de pressão) no interior de reservatórios de petróleo, considerando meios porosos heterogêneos e anisotrópicos, pode ser descrita como:

$$\nabla \cdot \vec{F} = Q(\vec{x}) \quad \text{com} \quad \vec{F} = -K(\vec{x})\nabla p \quad \text{em} \quad \vec{x} = (x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2 \quad (1)$$

Onde  $\Omega$  é um subconjunto limitado e aberto de  $\mathbb{R}^2$  com  $\partial\Omega$  sendo seu limite,  $p$  refere-se ao campo de pressão. O fluxo  $\vec{F}$  representa o fluxo de Darcy. O termo  $Q(\vec{x})$  representa o termo fonte. Em coordenadas cartesianas, o tensor de permeabilidade  $K(\vec{x})$  geralmente é uma matriz simétrica positiva definida de forma que pode ser descontínua em todo o domínio aberto de  $\Omega$ , conforme Equação 2.

$$K(\vec{x}) = \begin{pmatrix} k_{xx} & k_{xy} \\ k_{yx} & k_{yy} \end{pmatrix} \quad (2)$$

O problema descrito na Equação 1 apenas é completamente definido quando se utilizam as condições de contorno apropriadas. Condições de contorno tipicamente utilizadas são:

$$\begin{cases} p = g_D \text{ em } \Gamma_D \\ \vec{F} \cdot \vec{n} = g_N \text{ em } \Gamma_N \end{cases} \quad (3)$$

Onde  $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ .  $\Gamma_D$  e  $\Gamma_N$  representam os contornos de Dirichlet e Neumann, respectivamente. A função escalar  $g_D$  (variável escalar prescrita) é definida em  $\Gamma_D$  e  $g_N$  (fluxos prescritos) é definido em  $\Gamma_N$ . Além disso,  $\vec{n}$  é o vetor normal externo unitário.

### 2.2 Formulação numérica

Ao longo deste trabalho, utilizam-se as seguintes notações para representações de variáveis para o método MPFA-QL:

- $M$  é o conjunto de volumes de controle de forma que:  $\bigcup_{\hat{L} \in M} \hat{L} = \Omega$ , onde cada volume de controle  $\hat{L}$  é uma célula poligonal em forma de estrela em relação ao baricentro  $x_{\hat{L}}$ . O volume de  $\hat{L} \in M$  é representado por  $V_{\hat{L}}$  e o cardinal de  $M$  é dado por  $n$ .

- $\mathcal{E} = \{IJ\}$  é o conjunto de superfícies de controle (SC) de  $\Omega$ . A medida da SC genérica  $IJ$  é dada pela norma  $|\vec{IJ}|$ . Sejam  $\mathcal{E}_{int} = \mathcal{E} \cap \Omega$  e  $\mathcal{E}_{ext} = \mathcal{E} \cap \partial\Omega$  as representações dos conjuntos de SC interiores e de contorno, respectivamente. Para cada  $\hat{L} \in M$  existe um subconjunto  $\mathcal{E}_{\hat{L}}$  de  $\mathcal{E}$  de forma que:  $\partial\hat{L} = \bigcup_{IJ \in \mathcal{E}_{\hat{L}}} IJ$ . Assume-se que para todo  $IJ \in \mathcal{E}$ , existe  $IJ \subset \partial\Omega$  ou  $IJ \subset \hat{L} \cap \hat{R}$  para casos de  $(\hat{L}, \hat{R}) \in M \times M$ .
- $O = \{x_{\hat{L}}\}_{\hat{L} \in M}$  é o conjunto de baricentros dos volumes de controle (ou células ou elementos) de  $\Omega$ , de forma que para todo  $\hat{L} \in M$ ,  $x_{\hat{L}} \in \hat{L}$ .

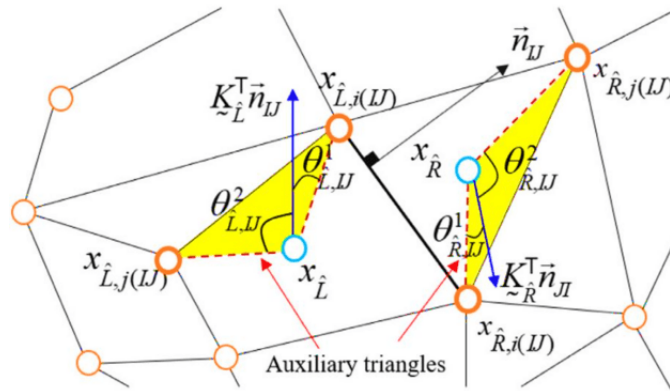
Integrando a Equação (1) sob todo o domínio de interesse e seguindo manipulações algébricas com a aplicação do teorema da divergência, considerando uma aproximação para cada volume de controle em que  $\hat{L} \in M$  representa uma malha poligonal, podemos representar a equação de balanço de fluxo como:

$$\sum_{IJ \in \mathcal{E}_{\hat{L}}} \vec{F}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ} = Q_{\hat{L}} V_{\hat{L}}, \quad \forall \hat{L} \in M \quad (4)$$

Onde  $\vec{F}_{IJ}$  e  $Q_{\hat{L}}$  representam a vazão e o termo fonte ou sumidouro, respectivamente. Sabendo que o fluxo unilateral através de  $IJ$  em relação ao volume de controle  $\hat{L}$  é expresso como:

$$\int_{IJ} \vec{F} \cdot \vec{n}_{IJ} ds = - \int_{IJ} K_{\hat{L}} \nabla_P \cdot \vec{n}_{IJ} ds = - \int_{IJ} \nabla_P \cdot K_{\hat{L}}^T \vec{n}_{IJ} ds, \quad \forall IJ \in \mathcal{E}_{\hat{L}} \quad (5)$$

Sendo  $K_{\hat{L}}^T$  o transposto do tensor de difusão. Aproxima-se o termo  $\nabla_P \cdot K_{\hat{L}}^T \vec{n}_{IJ}$  a partir de uma expansão em série de Taylor considerando as regiões triangulares auxiliares ilustradas na Figura. 1.



**Figura 1 - Caracterização dos parâmetros físico-geométricos do MPFA-QL, adaptado de Contreras et al. (2019).**

Considerando o triângulo  $\Delta x_L x_{L,i(IJ)} x_{L,j(IJ)}$  para uma decomposição da co-normal  $K_L^T \vec{n}_{IJ}$  que é escrita como uma combinação convexa dos segmentos  $\overline{x_L x_{L,i(IJ)}}$  e  $\overline{x_L x_{L,j(IJ)}}$  e devido ao fato de tratarmos o volume de controle  $\hat{L}$  como poligonal em forma de estrela, podemos expressar:

$$K_L^T \vec{n}_{IJ} = \alpha_{L,i(IJ)} \overline{x_L x_{L,i(IJ)}} + \alpha_{L,j(IJ)} \overline{x_L x_{L,j(IJ)}} \quad (6)$$

$$\alpha_{i,r(IJ)} = \frac{|K_i^T \vec{n}_{IJ}| \sin(\theta_{i,IJ}^1)}{|\overline{x_i x_{i,r(IJ)}}| \sin(\theta_{i,IJ}^1 + \theta_{i,IJ}^2)}, \quad i = L, R; \quad r = i, j; \quad j \neq i \quad (7)$$

Sendo as Equações 6 e 7 sujeitas às restrições  $\alpha_{\hat{L},i(IJ)} > 0$ ,  $\alpha_{\hat{L},j(IJ)} > 0$  e  $\alpha_{\hat{L},i(IJ)} + \alpha_{\hat{L},j(IJ)} > 0$  que devem ser aplicadas sob parâmetros físico-geométricos relacionados com os ângulos  $\theta_{\hat{L},IJ}^1$  e  $\theta_{\hat{L},IJ}^2$ .

### 2.3 Construção do fluxo numérico

Combinando a decomposição co-nomal apresentada nas Equações 5,6 e 7, é possível obter a seguinte expressão:

$$\int_{IJ} \vec{F} \cdot \vec{n}_{IJ} ds = - \int_{IJ} (\alpha_{\hat{L},i(IJ)} \nabla_P \cdot \overrightarrow{x_{\hat{L}} x_{\hat{L},i(IJ)}} + \alpha_{\hat{L},j(IJ)} \nabla_P \cdot \overrightarrow{x_{\hat{L}} x_{\hat{L},j(IJ)}}) ds \quad (8)$$

Para construção do fluxo unilateral relacionado às superfícies de controle  $IJ$  dos volumes de controle  $\hat{L}$  e  $\hat{R}$ , utiliza-se um esquema de diferenças finitas local para aproximar as derivadas parciais de  $\nabla_P$  ao longo das direções de  $\overrightarrow{x_{\hat{L}} x_{\hat{L},i(IJ)}}$ ,  $\overrightarrow{x_{\hat{L}} x_{\hat{L},j(IJ)}}$  e  $\overrightarrow{x_{\hat{R}} x_{\hat{R},i(IJ)}}$ ,  $\overrightarrow{x_{\hat{R}} x_{\hat{R},j(IJ)}}$ . Expressa-se sua forma compacta como:

$$\vec{F}_{IJ}^{\hat{L}} \cdot \vec{N}_{IJ} = |\vec{IJ}| (\psi_{\hat{L},IJ} p_{\hat{L}} - \sum_{\gamma=i,j} \alpha_{\hat{L},\gamma(IJ)} p_{\hat{L},\gamma(IJ)}) \quad (9)$$

$$\vec{F}_{IJ}^{\hat{R}} \cdot \vec{N}_{JI} = |\vec{IJ}| (\psi_{\hat{R},IJ} p_{\hat{R}} - \sum_{\gamma=i,j} \alpha_{\hat{R},\gamma(IJ)} p_{\hat{R},\gamma(IJ)}) \quad (10)$$

Onde  $\psi_{\hat{L},IJ} = \alpha_{\hat{L},i(IJ)} + \alpha_{\hat{L},j(IJ)}$  e  $\psi_{\hat{L},IJ} > 0$ . De forma análoga,  $\psi_{\hat{R},IJ} = \alpha_{\hat{R},i(IJ)} + \alpha_{\hat{R},j(IJ)}$  e  $\psi_{\hat{R},IJ} > 0$ . Agora, para construção de um fluxo único atuante sob  $IJ$ , construindo um esquema conservativo baseado nos fluxos obtidos nas Equações 9 e 10 e considerando a continuidade do fluxo na borda, pode-se escrever:

$$\vec{F}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ} = w_{\hat{L},IJ} \vec{F}_{IJ}^{\hat{L}} \cdot \vec{N}_{IJ} = -w_{\hat{R},IJ} \vec{F}_{IJ}^{\hat{R}} \cdot \vec{N}_{IJ} \quad (11)$$

Onde  $w_{\hat{L},IJ}$  e  $w_{\hat{R},IJ}$  são dois coeficientes positivos que dependem apenas de parâmetros físico-geométricos. Substituindo as Equações 9 e 10 na Equação 11 e após algumas manipulações e imposições algébricas quanto às identidades geométricas dos parâmetros  $\alpha_{i,r(IJ)}$ , obtém-se o fluxo único na superfície de controle  $IJ$ :

$$\vec{F}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ} = |\vec{IJ}| \frac{\psi_{\hat{L},IJ} \psi_{\hat{R},IJ}}{\psi_{\hat{L},IJ} + \psi_{\hat{R},IJ}} (p_{\hat{L}} - p_{\hat{R}}) - |\vec{IJ}| (w_{\hat{R},IJ} \alpha_{\hat{L},i(IJ)} - w_{\hat{L},IJ} \alpha_{\hat{R},j(IJ)}) p_{\hat{L},i(IJ)} - |\vec{IJ}| (w_{\hat{R},IJ} \alpha_{\hat{L},j(IJ)} - w_{\hat{L},IJ} \alpha_{\hat{R},i(IJ)}) p_{\hat{L},j(IJ)} \quad (12)$$

### 2.4 Condições de contorno

Para as SC  $IJ$  contidas no contorno de Dirichlet  $\Gamma_D \subset \varepsilon_{\hat{L}} \cap \varepsilon_{ext}$ , a vazão é dada a partir das Equações 9 e 10. Considera-se:

$$\vec{F}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ} = \vec{F}_{IJ}^{\hat{L}} \cdot \vec{N}_{IJ} = |\vec{IJ}| (\psi_{\hat{L},IJ} p_{\hat{L}} - \sum_{\gamma=i,j} \alpha_{\hat{L},\gamma(IJ)} p_{\hat{L},\gamma(IJ)}) \quad (13)$$

Em SC  $IJ$  contidas no contorno Neumann  $\Gamma_N \subset \varepsilon_{\hat{L}} \cap \varepsilon_{ext}$ , a vazão é dada por:

$$\vec{F}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ} = -\bar{g}_{N,IJ} |\vec{IJ}| \quad (14)$$

2.5 Interpolação para aproximação das incógnitas nos vértices

Como já citado anteriormente, o método MPFA-QL é uma formulação de volumes finitos totalmente centrada na célula, onde as variáveis auxiliares localizadas nos vértices da malha devem ser escritas como combinações lineares de variáveis centradas na célula. Para o cálculo dos pesos de interpolação, adotamos as estratégias clássicas LPEW2 e LSW, e comparamos com a eLPEW2. Esta última foi desenvolvida por Miao e Wu (2022) para problemas de difusão. O algoritmo de interpolação que procuramos configura-se da seguinte forma:

$$p_v = \sum_{\hat{L} \in M} \omega_{\hat{L}} p_{\hat{L}} \tag{15}$$

Onde  $\omega_{\hat{L}}$  representa os pesos de interpolação envolvidos a cada volume de controle na vizinhança do vértice  $v$ . Assim, pesos são expressos por:

$$\omega_{\hat{L}} = \frac{\varpi_{\hat{L}}}{\sum_{\hat{L} \in M} \varpi_{\hat{L}}}, \quad \varpi_{\hat{L}} = \frac{(\eta_{\hat{L},\sigma} + \eta_{\hat{L},\beta,\sigma}) \xi_{\hat{L},\sigma}}{\bar{\xi}_{\hat{L},\sigma} + \bar{\xi}_{\hat{L},\beta,\sigma}} + \frac{(\eta_{\hat{L},\tau} + \eta_{\hat{L},\beta,\tau}) \xi_{\hat{L},\tau}}{\bar{\xi}_{\hat{L},\tau} + \bar{\xi}_{\hat{L},\beta,\tau}} \tag{16}$$

O coeficiente  $\varpi_{\hat{L}}$  na Equação 16 é estruturado a partir de um desenvolvimento matemático de uma região considerada como um domínio triangular  $\Omega_v$  dado por  $x_v, x_\sigma, x_\tau$  onde se desenvolvem aproximações de fluxos nas bordas  $\sigma = x_v, x_\sigma$  e  $\tau = x_v, x_\tau$  em questão, conforme Figura 2.

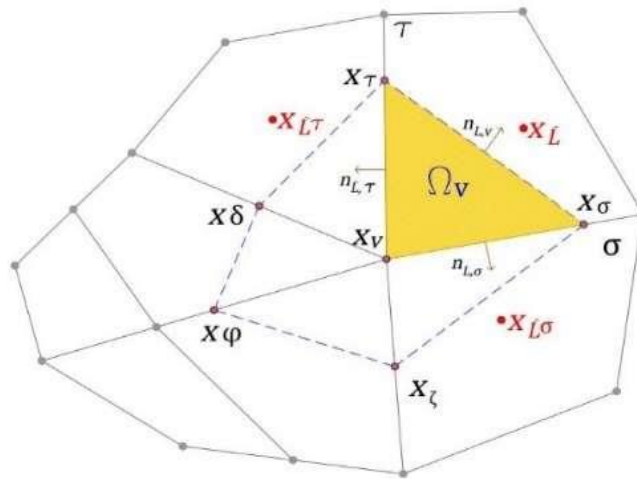


Figura 2 – Estêncil de interpolação para estratégia eLPEW2

Nesse contexto, uma aproximação que preserva a linearidade do fluxo recai em:

$$\nabla p_{\hat{L},v} = \frac{n_{\hat{L},v} + \epsilon |\sigma| n_{\hat{L},\sigma}}{2S_{\hat{L},v}} (p_{\sigma} - p_v) + \frac{n_{\hat{L},v} + \epsilon |\tau| n_{\hat{L},\tau}}{2S_{\hat{L},v}} (p_{\tau} - p_v) \tag{17}$$

Baseado na simetria do tensor de permeabilidade, após manipulações matemáticas, configura-se o parâmetro  $\eta_{\hat{L},\beta}$  na forma:

$$\eta_{\hat{L},\beta} = \frac{(K_{\hat{L},v} n_{\hat{L},v}) \cdot (n_{\hat{L},v} + \epsilon |\beta| n_{\hat{L},\beta})}{2S_{\hat{L},v}}, \quad \beta = \sigma, \tau. \tag{18}$$

De forma semelhante a Eq. (17), constroem-se 2 fluxos discretos através das arestas  $x_v, x_\sigma$  e  $x_v, x_\tau$ , com base na aproximação linear de  $p$  nos triângulos  $x_v, x_\sigma, x_{\hat{L}}$  e  $x_v, x_\tau, x_{\hat{L}}$ , respectivamente. Então, reforçando a continuidade do fluxo nas arestas  $\sigma, \tau$  e através de alguns cálculos, tem-se que:

$$p_{\beta} - p_v = \frac{\varepsilon_{\hat{L},\beta}}{\bar{\xi}_{\hat{L},\beta} + \bar{\xi}_{\hat{L},\beta,\beta}} (p_{\hat{L}} - p_v) + \frac{\varepsilon_{\hat{L},\beta,\beta}}{\bar{\xi}_{\hat{L},\beta} + \bar{\xi}_{\hat{L},\beta,\beta}} (p_{\hat{L},\beta} - p), \quad \beta = \sigma, \tau. \quad (19)$$

Por fim, levando a construção dos parâmetros  $\xi_{\alpha,\beta}$  e  $\bar{\xi}_{\alpha,\beta}$ , necessários para o cálculo de  $\varpi_K$ .

$$\xi_{\alpha,\beta} = \frac{(K_{\alpha,v} R t_{\beta}) \cdot R t_{\beta}}{d_{\alpha,\beta}}, \quad \bar{\xi}_{\alpha,\beta} = \frac{(K_{\alpha,v} R t_{\beta}) \cdot R(x_{\alpha} - x_v)}{d_{\alpha,\beta}}, \quad \alpha = \hat{L}, \hat{L}_{\beta}, \beta = \sigma, \tau. \quad (20)$$

### 3. Resultados

#### 3.1 Experimentos numéricos

Para analisar as devidas estratégias adotadas, apresentamos alguns exemplos numéricos que ilustram a robustez e acurácia do método de volumes finitos associado. Para o cálculo dos erros adotamos a norma discreta L2. Para o caso de solução de campos de pressão, adotamos a seguinte norma:

$$\mathfrak{E}_p = \left( \frac{\sum_{\hat{L} \in M} (p(\vec{x}_{\hat{L}}) - p_{\hat{L}})^2 V_{\hat{L}}}{\sum_{\hat{L} \in M} V_{\hat{L}}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (21)$$

Onde  $p(\vec{x}_{\hat{L}})$  configura a solução analítica obtida no baricentro  $\vec{x}_{\hat{L}}$  do volume de controle  $\hat{L}$ . Enquanto que para o fluxo, adotamos:

$$\mathfrak{E}_F = \left( \frac{\sum_{IJ \in \varepsilon} ((\vec{F}_n(\vec{x}_{IJ}) - \vec{F}_{IJ}) \cdot \vec{n}_{IJ})^2 A_{IJ}}{\sum_{IJ \in \varepsilon} A_{IJ}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (22)$$

Sendo, na SC  $IJ$ , o fluxo analítico no ponto médio  $\vec{x}_{IJ}$  definido por  $\vec{F}_n(\vec{x}_{IJ}) = -K \nabla p(\vec{x}_{IJ})$  e  $A_{IJ}$  uma área representativa como a soma das áreas dos CVs que compartilham  $IJ$ . As taxas de convergência numérica  $R_{\gamma}$  ( $\gamma = p, F$ ) são obtidas pela seguinte expressão:

$$R_{\gamma} = \frac{\log(\varepsilon_{\gamma}(h_2)/\varepsilon_{\gamma}(h_1))}{\log(h_2/h_1)} \quad (23)$$

Onde  $h_1$  e  $h_2$  representam o tamanho de duas malhas sucessivas e  $\varepsilon_{\gamma}(h_1)$  e  $\varepsilon_{\gamma}(h_2)$  as respectivas normas L2 correspondentes dos erros. Os valores máximo e mínimo do campo de pressão são calculados usando as seguintes relações  $p_{max} = \max\{p_{\hat{L}}\}$  e  $p_{min} = \min\{p_{\hat{L}}\} \forall \hat{L} \in M$ , respectivamente.

#### 3.2 Teste de convergência: escoamento monofásico num reservatório altamente heterogêneo e anisotrópico

Este problema, adaptado de Sheng e Yuan (2016), consiste em um domínio quadrado de dimensões  $\Omega = [0,1]^2$  com um tensor de permeabilidade que varia em função da posição, definido por:

$$K(\vec{x}) = R_{\theta} \begin{pmatrix} 1 + 2x^2 + y^2 & 0 \\ 0 & 1 + x^2 + 2y^2 \end{pmatrix} R_{-\theta}, \quad \theta = 5\pi/12 \quad (24)$$

A solução analítica para esse problema é expressa por:

$$p(\vec{x}) = \sin(\pi x) \sin(\pi y). \tag{25}$$

As condições de contorno de Dirichlet são obtidas diretamente da solução analítica. Para avaliar as taxas de convergência, consideramos um conjunto de malhas poligonais distorcidas. A modo de comparação, consideramos um outro método chamado NL-TPFA (Non Linear Two-Point Flux Approximation). A partir dos resultados expressos nas Tabelas 1 e 2.

**Tabela 1 - Erros e convergência em função do método interpolador para malha triangular levemente distorcida**

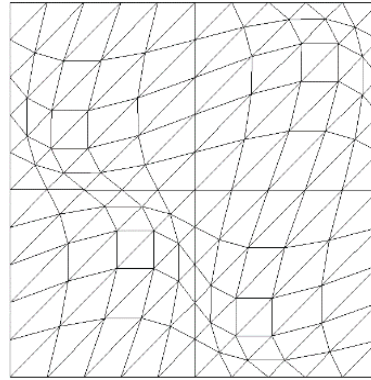
		MPFA-QL					NL-TPFA						
Malha	$m \times n$	10x10	20x20	40x40	80x80	160x160	Malha	$m \times n$	10x10	20x20	40x40	80x80	160x160
	$h$	0,1	0,05	0,025	1,25E-02	6,25E-03		$h$	0,1	0,05	0,025	1,25E-02	6,25E-03
CVs		200	800	3.200	12.800	51.200	CVs		200	800	3.200	12.800	51.200
LPEW2	$\mathcal{E}_p$	0,0093	0,0022	5,52E-04	1,38E-04	3,77E-05	LPEW2	$\mathcal{E}_p$	0,0137	0,0039	0,0011	3,20E-04	8,74E-05
	$R_p$	-	2,08	1,99	2,00	1,87		$R_p$	-	1,81	1,83	1,78	1,87
	$\mathcal{E}_f$	0,0694	0,0188	0,0049	0,0013	3,43E-04		$\mathcal{E}_f$	0,1125	0,0400	0,0140	0,0049	0,0017
	$R_f$	-	1,88	1,94	1,91	1,92		$R_f$	-	1,49	1,51	1,51	1,53
LSW	$\mathcal{E}_p$	0,0091	0,0022	5,39E-04	1,38E-04	4,02E-05	LSW	$\mathcal{E}_p$	0,0132	0,0038	0,0011	3,27E-04	4,65E-05
	$R_p$	-	2,05	2,03	1,97	1,78		$R_p$	-	1,80	1,79	1,75	2,81
	$\mathcal{E}_f$	0,0758	0,0218	0,006	0,0017	5,45E-04		$\mathcal{E}_f$	0,1134	0,0413	0,0146	0,0052	0,0019
	$R_f$	-	1,80	1,86	1,82	1,64		$R_f$	-	1,46	1,50	1,49	1,45
eLPEW2	$\mathcal{E}_p$	0,0093	0,0022	5,52E-04	1,38E-04	3,77E-05	eLPEW2	$\mathcal{E}_p$	0,0137	0,0039	0,0011	3,20E-04	8,74E-05
	$R_p$	-	2,08	1,99	2,00	1,87		$R_p$	-	1,81	1,83	1,78	1,87
	$\mathcal{E}_f$	0,0694	0,0188	0,0049	0,0013	3,43E-04		$\mathcal{E}_f$	0,1125	0,0400	0,0140	0,0049	0,0017
	$R_f$	-	1,88	1,94	1,91	1,92		$R_f$	-	1,49	1,51	1,51	1,53

**Tabela 2 - Erros e convergência em função do método interpolador para malha quadrilateral de Kershaw**

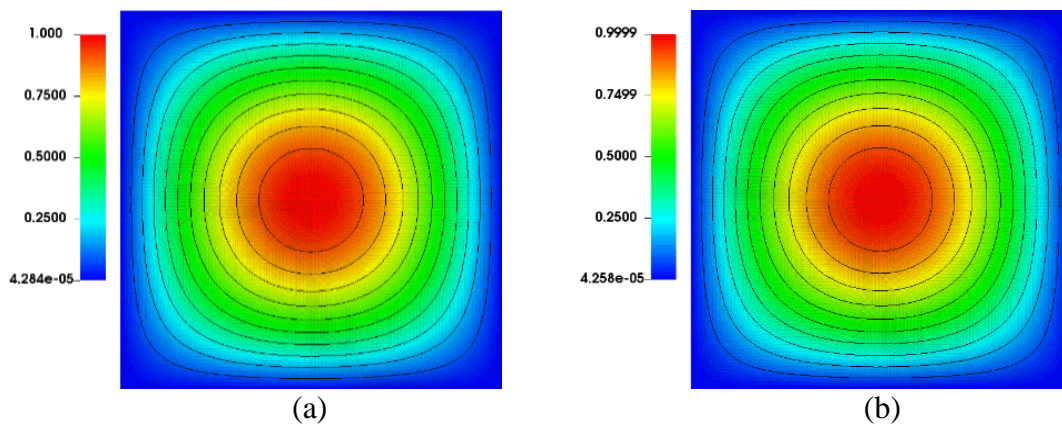
		MPFA-QL					NL-TPFA						
Malha	$m \times n$	10x10	20x20	40x40	80x80	160x160	Malha	$m \times n$	10x10	20x20	40x40	80x80	160x160
	$h$	0,1	0,05	0,025	1,25E-02	6,25E-03		$h$	0,1	0,05	0,025	1,25E-02	6,25E-03
CVs		200	800	3.200	12.800	51.200	CVs		200	800	3.200	12.800	51.200
LPEW2	$\mathcal{E}_p$	0,0495	0,0291	0,0126	0,0042	1,20E-03	LPEW2	$\mathcal{E}_p$	0,0326	0,0209	0,0095	3,20E-03	8,96E-04
	$R_p$	-	0,77	1,21	1,58	1,81		$R_p$	-	0,64	1,14	1,57	1,84
	$\mathcal{E}_f$	0,7275	0,3983	0,171	0,0607	1,97E-02		$\mathcal{E}_f$	0,5195	0,2998	0,1341	0,0484	0,0159
	$R_f$	-	0,87	1,22	1,49	1,62		$R_f$	-	0,79	1,16	1,47	1,61
LSW	$\mathcal{E}_p$	0,0489	0,027	0,0112	0,0036	1,09E-03	LSW	$\mathcal{E}_p$	0,0335	0,0197	0,0087	0,0028	7,91E-04
	$R_p$	-	0,86	1,27	1,64	1,73		$R_p$	-	0,77	1,18	1,64	1,82
	$\mathcal{E}_f$	0,6698	0,3508	0,1482	0,0526	1,73E-02		$\mathcal{E}_f$	0,4746	0,2684	0,1193	0,0433	0,0145
	$R_f$	-	0,93	1,24	1,49	1,60		$R_f$	-	0,82	1,17	1,46	1,58
eLPEW2	$\mathcal{E}_p$	0,0495	0,0291	0,0126	0,0042	1,20E-03	eLPEW2	$\mathcal{E}_p$	0,0326	0,0209	0,0095	0,0032	8,96E-04
	$R_p$	-	0,77	1,21	1,58	1,81		$R_p$	-	0,64	1,14	1,57	1,84
	$\mathcal{E}_f$	0,7275	0,3983	0,171	0,0607	1,97E-02		$\mathcal{E}_f$	0,5195	0,2998	0,1341	0,0484	0,0159
	$R_f$	-	0,87	1,22	1,49	1,62		$R_f$	-	0,79	1,16	1,47	1,61

A partir desses resultados é possível observar que os interpoladores associados ao MPFA-QL obtêm acurácia de praticamente segunda ordem para a solução de campos de pressão. Ao analisar a influência dos interpoladores utilizados, pode-se observar que a estratégia eLPEW2 foi responsável pelos resultados com maior acurácia apresentada. Baseado nessas simulações, a geometria do reservatório é representada pela Figura 3 e podemos expressar os seguintes campos de pressão, expostos nas Figuras 5 e 6, para auxiliar na análise do comportamento do reservatório:

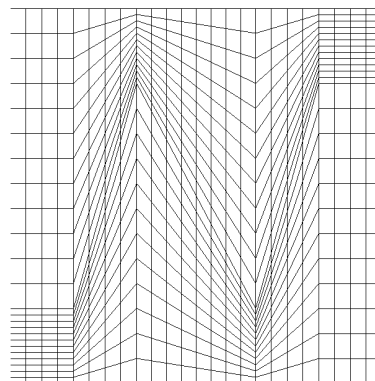




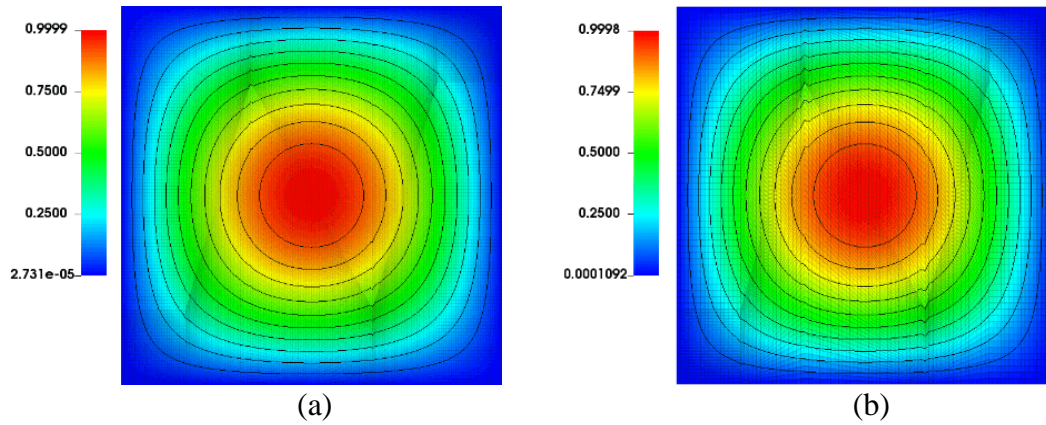
**Figura 3- Malha triangular levemente distorcida com 200 CVs.**



**Figura 4 - Campos de pressão obtidos pelo (a) MPFA-QL e (b) NL-TPFA junto à estratégia eLPEW2, respectivamente.**



**Figura 5- Malha quadrilateral de Kershaw com 576 CVs.**



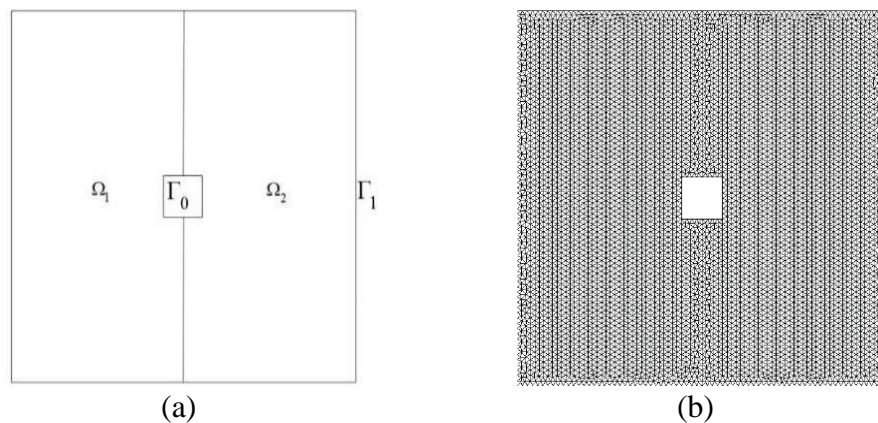
**Figura 6 - Campos de pressão obtidos pelo (a) MPFA-QL e (b) NL-TPFA junto à estratégia eLPEW2, respectivamente.**

*3.3 Teste de monotonicidade: escoamento monofásico num reservatório extremamente heterogêneo e anisotrópico*

Para este problema, baseado em Queiroz et al. (2014), consideramos um domínio quadrado unitário com um furo interior definido como  $\Omega = [0,1]^2/[4/9,5/9]^2$ , tal que o limite é a união disjunta de  $\Gamma_0$  e  $\Gamma_1$ . Além disso, é definido  $g_D = 0$  em  $\Gamma_1$  e  $g_D = 2$  em  $\Gamma_0$  e  $Q(\vec{x}) = 0$ . O tensor de permeabilidade é dado por:

$$\begin{cases} K(\vec{x}) = R_\theta \begin{pmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 0.01 \end{pmatrix} R_{-\theta}, \text{ para } (x, y) \in \Omega_1, x \leq 0.5 \\ K(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 10^3 x_1^2 + y^2 & -(1 - 10^3)x_1 y_1 \\ -(1 - 10^3)x_1 y_1 & x_1^2 + 10^3 y_1^2 \end{pmatrix}, \text{ para } (x, y) \in \Omega_2, x > 0.5 \end{cases} \quad (26)$$

Onde  $\theta = \frac{\pi}{2}$ ,  $x_1 = x + 10^{-3}$  e  $y_1 = y + 10^{-3}$ . Podemos ainda representar o domínio do problema como exposto na Figura 7:

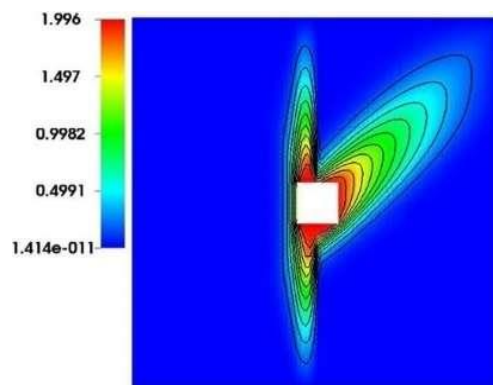


**Figura 7 - (a) Esboço do domínio computacional e (b) Malha triangular não estruturada com 1208 CVs, respectivamente.**

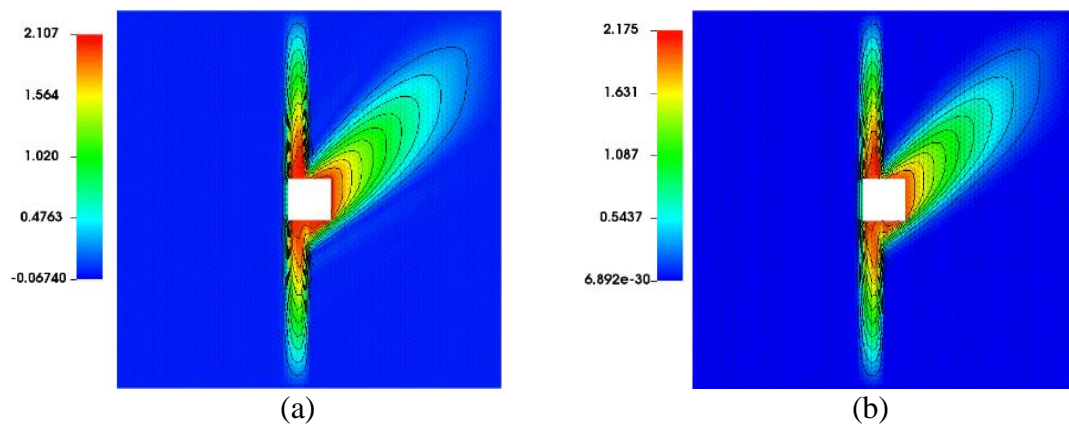
Nesse teste, utilizamos três níveis de refinamento para ilustrar o comparativo de soluções simuladas entre o MPFA-QL adotado e o método NL-TPFA. Os resultados obtidos são ilustrados na Tabela 3. É possível observar que o MPFA-QL, assim como outros métodos lineares, falha em satisfazer o Princípio do Máximo Discreto com todas as estratégias de interpolação verificadas, enquanto que ao se utilizar o método NL-TPFA associado ao eLPEW2, conseguimos resultados próximos do almejado na solução de referência, como mostrado nas Figuras 7 e 8.

**Tabela 3 - Erros e taxas de convergência sobre malha triangular levemente distorcida.**

MPFA-QL					NL-TPFA				
Malha	$m \times n$	18x18	36x36	72x72	Malha	$m \times n$	18x18	36x36	72x72
CVs		734	2.730	12.008	CVs		734	2.730	12.008
LPEW2	$p_{min}$	-0,2462	-0,0944	-0,0674	LPEW2	$p_{min}$	1,86E-13	2,1121E-21	6,8923E-30
	$p_{max}$	2,0067	2,176	2,1072		$p_{max}$	2,1776	2,4419	2,1748
LSW	$p_{min}$	-0,3055	-1,948	-0,0913	LSW	$p_{min}$	2,15E-12	3,18E-14	5,33E-18
	$p_{max}$	2,0316	3,5286	2,0746		$p_{max}$	2,2535	2,553	2,141
eLPEW2	$p_{min}$	-0,2462	-0,0944	-0,0674	eLPEW2	$p_{min}$	1,8598E-13	2,1122E-21	6,8923E-30
	$p_{max}$	2,0067	2,1796	2,1072		$p_{max}$	2,1776	2,4419	2,1748



**Figura 7 – Solução de referência obtida com o método SSEPS.**



**Figura 8 – Campos de pressão obtidos pelo (a) MPFA-QL e (b) NL-TPFA associados ao interpolador eLPEW2.**

#### 4. Conclusões

No presente trabalho, os testes apresentados demonstraram uma boa capacidade de desempenho numérico do MPFA-QL associado aos interpoladores clássicos, bem como ao eLPEW2 em malhas distorcidas e com forte razão de anisotropia. Destaca-se que a estratégia de interpolação eLPEW2 demonstrou uma taxa de convergência relativamente maior quando comparada ao LSW. Esse fato deve-se a tendência do LSW de possuir perda de precisão em casos de tensores anisotrópicos e descontínuos. Ao analisar o eLPEW2 e LPEW2, mesmo com resultados consistentes e similares nos métodos analisados, a concepção e simplicidade de implementação computacional do eLPEW2, bem como o fato de que sua derivação não depende de funções trigonométricas, contribuiu na eficiência computacional dos resultados.

#### Agradecimentos

Agradecemos ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e à Fundação de Amparo à Ciência e Tecnologia do Estado de Pernambuco (FACEPE) pelo fomento e viabilização da nossa pesquisa, bem como ao ENMC/ECTM/MCSul/SEMENGO 2022 por ter sido a primeira forma de divulgação deste trabalho.

#### Referências

- Contreras, F. R. L., Lyra, P. R., Souza, M., Carvalho, D. K. E. (2016), “A cell-centered multipoint flux approximation method with a diamond stencil coupled with a higher order finite volume method for the simulation of oil–water displacements in heterogeneous and anisotropic petroleum reservoirs”. *Computers & Fluids*, 127, 1–16.
- Contreras F. R. L., Lyra P. R., Carvalho, D. K. E. (2019), “A new multipoint flux approximation method with a quasi-local stencil (MPFA-QL) for the simulation of diffusion problems in anisotropic and heterogeneous media”. *Applied Mathematical Modelling*, 70, 659–676.
- Coudière, Y., Vila, J.-P., Villedieu, P. (1999), “Convergence rate of a finite volume scheme for a two dimensional convection-diffusion problem, *M2AN Math. Model. Number. Anal.* 33, 493-516.
- Gao, Z., Wu, J. (2011), “A linearity-preserving cell-centered scheme for the heterogeneous and anisotropic diffusion equations on general meshes”. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 12, 2157-2183
- Hebert, R., Hubert, F. (2008), “Benchmark on discretization schemes for anisotropic diffusion problems on general grids”. *Finite Volumes for Complex Applications*, 1, 659-692.
- Miao, S., Wu, J. (2022), “A nonlinear correction scheme for the heterogeneous and anisotropic diffusion problems on polygonal meshes”. *Journal of Computational Physics*, v. 448.
- Queiroz, L., Souza, M., Contreras, F. R. L., Lyra P. R., Carvalho, D. K. E. (2014), “On the accuracy of a nonlinear finite volume method for the solution of diffusion problems using different interpolations strategies”. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 74, 270–291.
- Sheng, Z., Yuan, G. (2016), “A new nonlinear finite volume scheme preserving positivity for diffusion equations”. *Journal of Computational Physics*, 315, 182–193.
- Yuan, G., Sheng, Z. (2008), “Monotone finite volume schemes for diffusion equations on polygonal meshes”. *Journal of Computational Physics*, 227, 6288–6312.