

Analytical study of the proposed Grid Theory model with elastic supports using numerical models for stress analysis

Estudo analítico do modelo proposto de Teoria de Grelha com apoios elásticos utilizando modelos numéricos para análise de solicitações

Article Info:

Article history: Received 2023-02-01 / Accepted 2023-05-20 / Available online 2023-05-24

doi: 10.18540/jcecv19iss3pp15632-01e



Thiago Cunha da Silva

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3942-9723>

UERJ, Brasil

E-mail: thiagocunha0307@gmail.com

Maria Elizabeth da Nóbrega Tavares

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1273-4776>

UERJ, Brasil

E-mail: maria.tavares@eng.uerj.br

Resumo

Existem diversos métodos de cálculo para determinar as solicitações em lajes de concreto armado, porém, as técnicas mais precisas requerem a resolução de equações diferenciais, que podem ser difíceis de aplicar na prática. Em contrapartida, os métodos de cálculo práticos utilizam simplificações nas equações para torná-los mais viáveis. Uma dessas simplificações é a adoção de apoios rígidos para o cálculo das reações e deslocamentos, que é comumente empregado. Entretanto, essa premissa não reflete a realidade na prática de projeto, visto que as vigas que servem como apoio para a laje sofrem deformações, apresentando, em muitos casos, deslocamentos significativos que devem ser considerados para o cálculo. Nesse contexto, este artigo propõe uma nova abordagem da Teoria de Grelha que leva em conta a flexibilidade dos apoios da laje para o cálculo dos momentos e deslocamentos. Para avaliar a eficácia dessa nova abordagem, foram realizadas 16 análises em 2 modelos numéricos com vigas rígidas e flexíveis, resultando na comprovação de que o modelo proposto apresentou uma boa concordância nos resultados obtidos.

Palavras-chave: Teoria de Grelha. Lajes. Flexibilidade dos apoios. Modelo numérico. Concreto armado.

Abstract

There are several calculation methods to determine the stresses in reinforced concrete slabs. However, the most precise techniques require solving differential equations, which can be difficult to apply in practice. On the other hand, practical calculation methods use simplifications in the equations to make them more feasible. One of these simplifications is the adoption of rigid supports for the calculation of reactions and displacements, which is commonly used. However, this assumption does not reflect the reality in design practice, as the beams that serve as support for the slab undergo deformations, presenting in many cases significant displacements that must be considered in the calculation. In this context, this article proposes a new approach to the Grid Theory that takes into account the flexibility of slab supports for moment and displacement calculation. To evaluate the effectiveness of this new approach, 16 analyses were carried out on two numerical models with rigid and flexible beams, resulting in proof that the proposed model showed good agreement in the obtained results.

Keywords: Grid Theory. Slabs. Support flexibility. Numerical model. Reinforced concrete.

1. Introdução

Há diversas maneiras de calcular lajes de concreto armado, como a Teoria de Grelha, o Método dos Elementos Finitos e o Processo de Marcus. Cada método tem suas próprias simplificações para tornar mais fácil a obtenção de informações sobre solicitações e deslocamentos. No entanto, estudos mostram que esses métodos nem sempre produzem resultados precisos, especialmente quando se trata das condições de contorno das lajes.

A flexibilidade das vigas de bordo das lajes, que podem vir a apresentar elevados deslocamentos, geralmente não são considerados nas teorias de cálculo de lajes de concreto armado. Um estudo comparativo sobre os efeitos das condições de contorno das lajes foi realizado por Ju e Lin (1999). Os autores observaram que a modelagem da flexibilidade das lajes pode levar a resultados muito diferentes, o que pode resultar em patologias e mau desempenho estrutural.

Ensaaios indicam que os métodos convencionais de cálculo de lajes podem não produzir resultados precisos a depender do grau de flexibilidade dos apoios, especialmente em relação às condições de contorno das lajes, como avaliado em Shu et al. (2015).

Este artigo propõe uma contribuição à Teoria de Grelha para incluir a flexibilidade das vigas de apoio e fornecer coeficientes para calcular as reações de apoio e deslocamentos, visando melhorar a metodologia de cálculo das lajes de concreto armado.

2. Considerações acerca da flexibilidade dos apoios

Quando se leva em conta a flexibilidade dos apoios no cálculo de lajes, os resultados podem diferir significativamente dos obtidos ao considerar a condição de contorno de apoios rígidos. Segundo Araújo (2008), devido à condição de contorno geralmente utilizada (apoios rígidos), é comum ocorrer um maior momento fletor na direção do menor vão da laje. No entanto, dependendo do grau de flexibilidade das vigas de bordo, essa não será necessariamente a direção da maior solicitação. Silva e Horowitz (2008) chegaram a conclusão semelhante em sua análise, observando que a consideração da flexibilidade das vigas de apoio levou a um aumento dos momentos fletores das lajes e uma redução dos momentos fletores das vigas.

Araújo (2008) alerta que ao considerar o engastamento de lajes com continuidade com lajes adjacentes, e ao utilizar a teoria de placas para a obtenção das solicitações, não se obtêm valores confiáveis para os esforços solicitantes em lajes apoiadas sobre vigas flexíveis. Estudos realizados por Arman (2014) comprovam que o deslocamento de lajes de concreto armado depende da rigidez dos apoios, onde foi observado que o deslocamento no meio da laje diminui com o aumento da rigidez das vigas de apoio. Conclusões semelhantes foram apresentadas por Abdel-Karim (2006) e Galyautdinov (2017).

Análises efetuadas por Tangwongchai et al. (2011) destacam a importância de se considerar a flexibilidade das vigas de apoio das lajes para uma análise estrutural mais precisa dos elementos estruturais. Além disso, Bueno e Loriggio (2016) e Galyautdinov (2017) observaram que a rigidez das vigas de apoio também influencia nas propriedades dinâmicas da estrutura, além das propriedades estáticas que são influenciadas pela flexibilidade das vigas de apoio.

3. Modelo proposto para aplicação de apoios elásticos na Teoria de Grelha

Para calcular as solicitações em lajes de concreto armado utilizando a metodologia proposta neste estudo, é adotada a mesma abordagem utilizada na Teoria de Grelha. Essa metodologia consiste na subdivisão da laje em faixas ortogonais de largura unitária. A Figura 1 ilustra uma faixa de laje suportada por vigas.

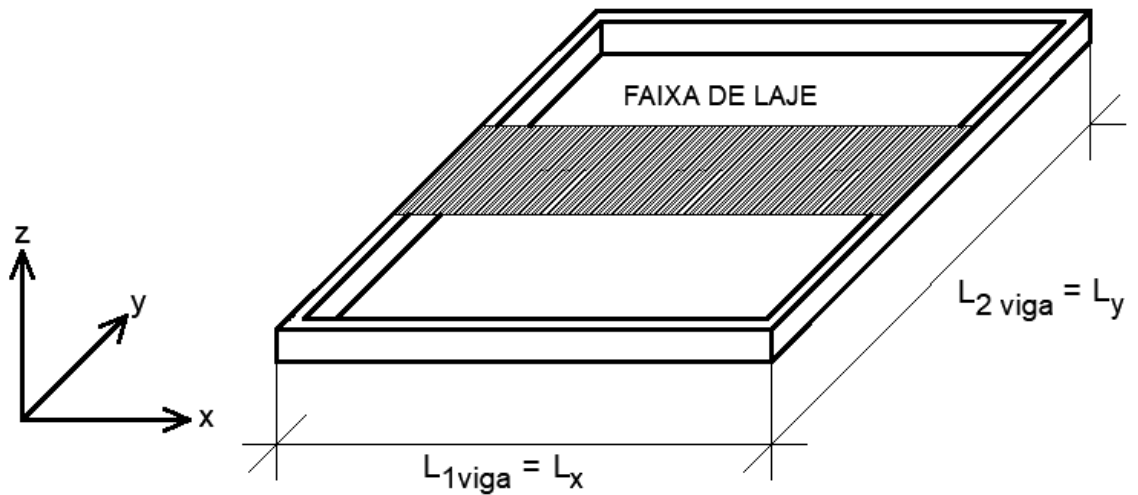


Figura 1 – Faixa de laje apoiada sobre vigas.

Na Teoria de Grelha com apoios flexíveis, o modelo estrutural adotado parte da premissa de que as vigas de borda são simplesmente apoiadas nas extremidades e apresentam deslocamento em resposta à carga da faixa de laje, conforme pode ser verificado na Figura 2.

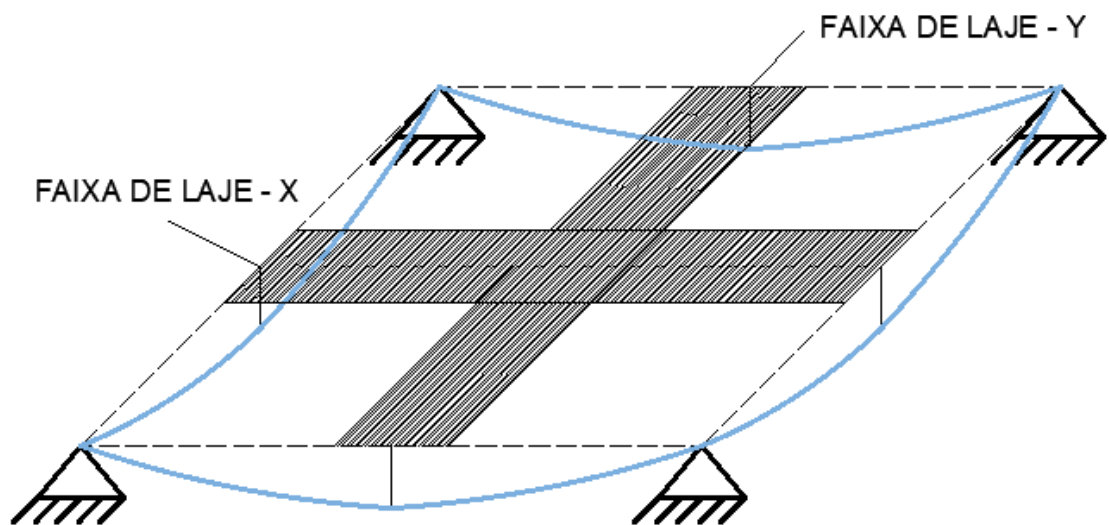


Figura 2 – Deslocamento nas vigas de apoio da laje.

Os modelos estruturais utilizados para o cálculo do deslocamento da viga de bordo são apresentados na Figura 3.

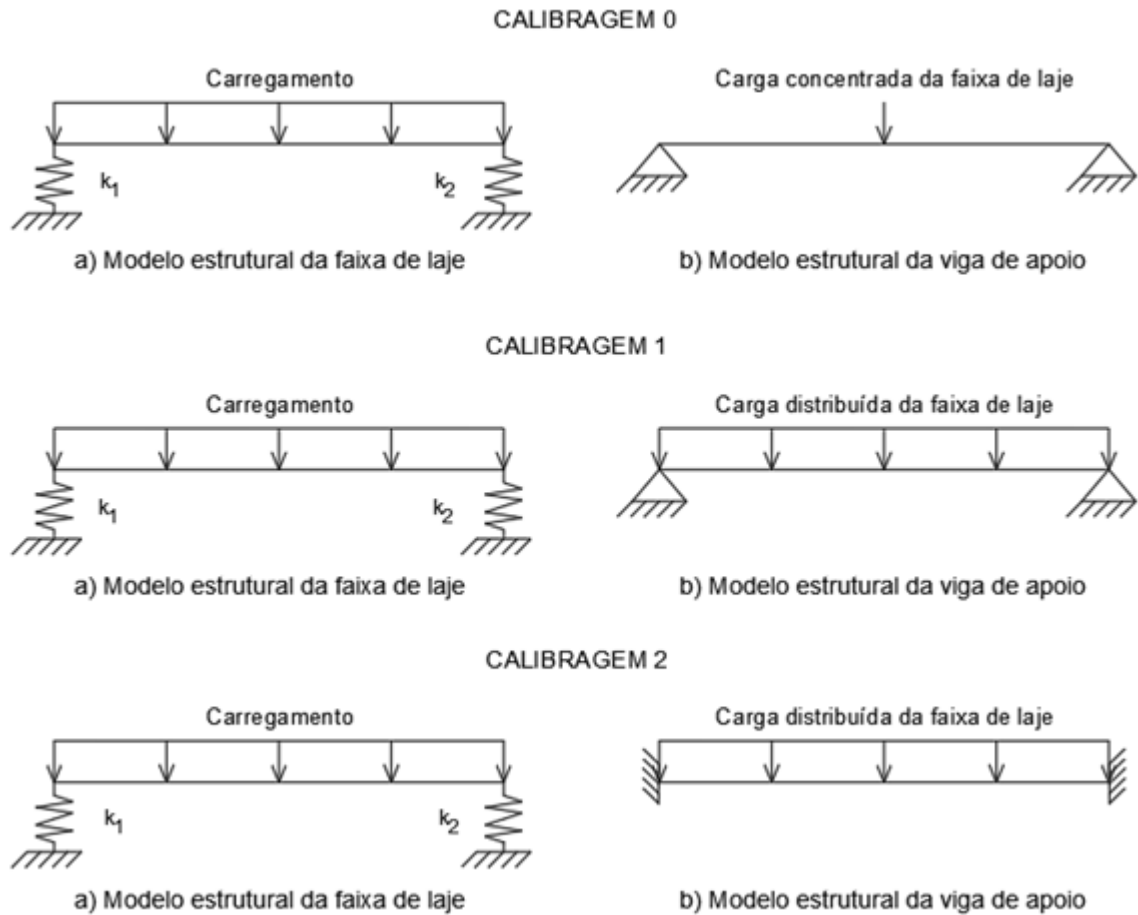


Figura 3 – Modelos estruturais para o cálculo do deslocamento da viga de apoio.

4.1 Cálculo das solicitações pelo modelo proposto

O cálculo do deslocamento da faixa de laje é obtido pela soma do deslocamento devido ao carregamento distribuído da faixa com o encurtamento elástico dos apoios. Assim, o deslocamento final da faixa de laje é dado pela equação 2.

$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 \tag{1}$$

$$\Delta = -\frac{\alpha}{384} \frac{qL_{laje}^4}{EI_{laje}} - \frac{P}{k} \tag{2}$$

Onde α é um coeficiente que depende do tipo de vinculação da faixa, q é a carga distribuída na faixa de laje, P é a carga concentrada na viga devido ao carregamento da laje, k é o apoio elástico da faixa de laje (dado em função do tipo de vinculação), EI_{laje} é a rigidez à flexão da laje e L_{laje} é o comprimento da faixa de laje.

O cálculo do coeficiente K_x de distribuição de carga na direção X da faixa de laje segue a mesma sistemática de cálculo das solicitações pela Teoria de Grelha. O carregamento associado à faixa Y é dada pela equação 4.

$$K_x = \frac{\left(\alpha_y \frac{L_y^4}{EI_{laje}} + 192 \frac{L_y}{k_y}\right)}{\left(\alpha_x \frac{L_x^4}{EI_{laje}} + 192 \frac{L_x}{k_x}\right) + \left(\alpha_y \frac{L_y^4}{EI_{laje}} + 192 \frac{L_y}{k_y}\right)} \tag{3}$$

$$K_y = 1 - K_x \tag{4}$$

Os coeficientes α e k são obtidos em função do tipo de vinculação na faixa de laje, onde o subíndice indica a qual faixa se refere. Os valores foram calculados considerando-se as rigidezes dos apoios k_1 e k_2 .

- Apoiado – Apoiado

$$\alpha = -5 \quad (5)$$

$$k = -2 \frac{k_1 k_2}{(k_1 \lambda_2 + k_2 \lambda_1)} \quad (6)$$

- Engastado – Engastado

$$\alpha = (48\beta^4 - 96\beta^3 + 32\beta^2) \quad (7)$$

$$k = -\frac{k_1}{2\lambda_1\beta} \quad (8)$$

$$\beta = \frac{[(24EI_{laj} \frac{\lambda_2}{k_2}) + L_{laj} e^3]}{[24EI_{laj} e (\frac{\lambda_1}{k_1} + \frac{\lambda_2}{k_2}) + 2L_{laj} e^3]} \quad (9)$$

- Engastado – Apoiado

$$\alpha = 48(1 - \psi)^4 - 96(1 - \psi)^2 + 192\psi(1 - \psi)^2 \quad (10)$$

$$k = -\frac{k_1}{2\lambda_1(1-\psi)} \quad (11)$$

$$\psi = \frac{24EI_{laj} e (\frac{\lambda_1}{k_1}) + 3L_{laj} e^3}{(24EI_{laj} e (\frac{\lambda_1}{k_1} + \frac{\lambda_2}{k_2}) + 8L_{laj} e^3)} \quad (12)$$

A constante λ é um fator que deve ser multiplicado a um determinado deslocamento de referência (modelos estruturais da Figura 3) de forma a se obter o deslocamento final do elemento estrutural nos casos em que o deslocamento final é diferente dos pré-estabelecidos.

O cálculo dos coeficientes α , β e ψ foram obtidos por meio da equação da linha elástica e verificados por meio do software Ftool, onde foi verificada a exatidão dos valores. Pode-se constatar que ao se admitir apoios infinitamente rígidos ($k_1 = k_2 = \infty$) os coeficientes α , β e ψ resultam nos valores utilizados nas condições de apoios infinitamente rígidos.

4. Análise numérica – Modelo 1

O objeto de estudo é uma laje com lados de 3 metros e espessura de 10cm, cujos elementos estruturais são compostos por concreto com módulo de elasticidade constante igual a $E=30,672$ GPa. Para a análise, foram utilizadas vigas de bordo com seções de 20x40 (vigas rígidas) e 10x20 (vigas flexíveis). Embora a seção de viga flexível não seja utilizada na prática, foi adotada apenas para fins analíticos. A baixa inércia também pode ser interpretada como alguma patologia que leva à redução na rigidez da viga, como fissuração excessiva ou baixa resistência.

Além disso, a rigidez à torção das vigas de bordo foi modificada, com os seguintes percentuais de rigidez elástica à torção da viga de apoio sendo analisados: 100%, 15%, 1% e 0%. A redução da rigidez à torção das vigas de bordo é baseada no item 14.6.6.2 da NBR 6118/2014, que prevê a consideração de um certo grau de redução da inércia à torção das vigas de bordo devido à fissuração. Além do estudo comparativo descrito acima, também foi realizada uma análise considerando a redução da rigidez à torção da laje em 15% do valor original. Para esse estudo, foram

utilizadas as mesmas hipóteses de análise (redução da rigidez à torção da viga de bordo e espessura da laje).

A Figura 4 ilustra o Modelo 1 analisado no software SAP2000. As vigas foram analisadas como elementos de pórtico e a laje foi subdividida em elementos de área, sendo utilizado o elemento SHELL-THIN para caracterizar esses elementos.

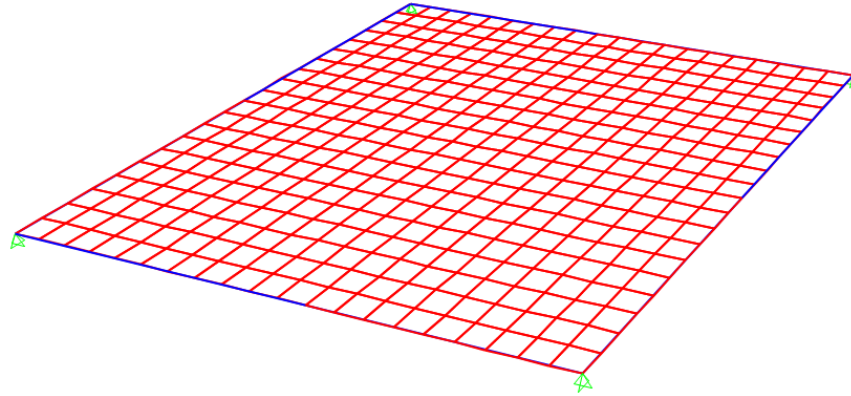


Figura 4 – Modelo 1 em laje quadrada e simplesmente apoiada.

As Tabela 1 e Tabela 2 apresentam os valores obtidos na análise numérica em conjunto com os da Teoria de Grelha e do modelo proposto. Nos resultados apresentados a sigla RIT faz referência à análise com redução da inércia à torção da laje a 15% do valor total.

A partir das análises realizadas, verificou-se que a redução da inércia à torção das vigas de borda aumenta o momento fletor positivo da laje no modelo numérico e reduz o momento negativo nas bordas, devido ao grau de engastamento na ligação entre a laje e a viga de borda. Quando a inércia à torção da viga de bordo é considerada em sua totalidade, a laje tende a se comportar como uma laje parcialmente engastada nas bordas.

No entanto, ao desconsiderar a inércia à torção das vigas de borda, o comportamento da laje se aproxima de uma laje simplesmente apoiada. Os resultados com a redução da inércia à torção da viga são os que mais se aproximam da condição de contorno de laje simplesmente apoiada. Os resultados numéricos mostram um aumento no momento fletor positivo ao se reduzir a inércia à torção das vigas de apoio.

A perda de rigidez à torção da laje resulta em resultados mais próximos do modelo analítico, que desconsidera a inércia à torção na laje. Os deslocamentos também tendem a aumentar com a redução da inércia à torção das vigas de borda.

Tabela 1 – Modelo 1: Momento positivo máximo.

MOMENTO POSITIVO MÁXIMO (kN.m/m) - LAJE DE 10CM					
	INÉRCIA À TORÇÃO DA VIGA	TEORIA DE GRELHA	MODELO PROPOSTO	Modelo 1 Laje 10cm	Modelo 1 - RIT Laje 10cm
VIGA DE 20X40	100%	1.406	1.406	0.815	0.95
	15%	1.406	1.406	0.97	1.23
	1%	1.406	1.406	1.08	1.5
	0%	1.406	1.406	1.09	1.54
VIGA DE 10X20	100%	1.406	1.406	1.81	1.57
	15%	1.406	1.406	1.845	1.43
	1%	1.406	1.406	1.84	1.39
	0%	1.406	1.406	1.84	1.39

Tabela 2 – Modelo 1: Deslocamento máximo.

		DESLOCAMENTO MÁXIMO (mm) - LAJE DE 10CM			
	INÉRCIA À TORÇÃO DA VIGA	TEORIA DE GRELHA	MODELO PROPOSTO	Modelo 1 Laje 10cm	Modelo 1 - RIT Laje 10cm
VIGA DE 20X40	100%	0.495	0.527	0.314	0.339
	15%	0.495	0.527	0.37	0.434
	1%	0.495	0.527	0.41	0.526
	0%	0.495	0.527	0.42	0.537
VIGA DE 10X20	100%	0.495	1.01	1.18	1.17
	15%	0.495	1.01	1.18	1.17
	1%	0.495	1.01	1.18	1.17
	0%	0.495	1.01	1.18	1.17

Ao se considerar que as vigas de apoio são flexíveis, pôde-se constatar que os momentos fletores, nos modelos com redução da inércia à torção da laje, possuem variação significativa entre o centro da laje e sua extremidade, conforme ilustra a Figura 5.

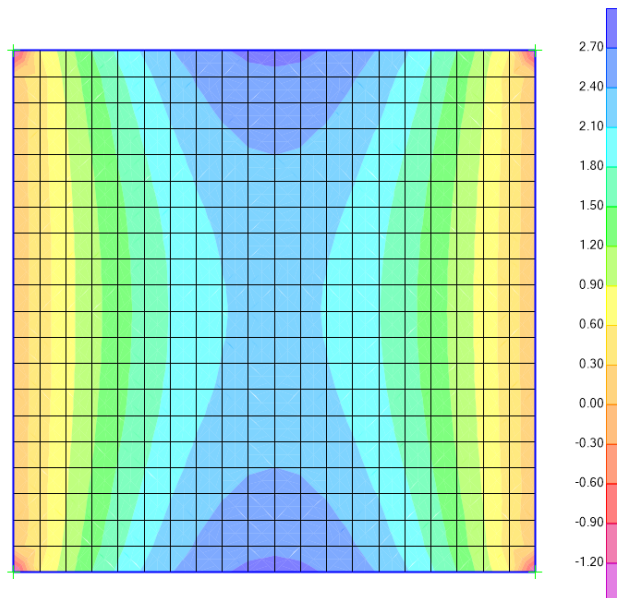


Figura 5 – Variação do momento positivo na direção X do Modelo 1 – RIT.

Os resultados da Tabela 1 na análise numérica referente ao caso de vigas de borda flexíveis são apresentados como a média dos valores mínimos e máximos na região central da laje. Verificou-se que a diferença nos cálculos dos deslocamentos entre o Modelo 1 e o Modelo 1 - RIT é pequena para o caso de vigas flexíveis.

A Teoria de Grelha forneceu valores menores do que os obtidos na análise numérica. No entanto, o modelo proposto apresentou resultados mais próximos dos valores obtidos na análise numérica.

Entretanto, os valores apresentados nas Tabela 1 e 2 apresentam apenas os resultados referentes à calibragem 0 (Figura 3). A Tabela 3, por sua vez, ilustra os resultados dos deslocamentos considerando os modelos estruturais de referência para o cálculo do deslocamento da viga de borda. Por se tratar de um sistema isostático e simétrico não há alteração, pelo modelo proposto, dos momentos fletores, sendo obtidos os mesmos apresentados na Tabela 1.

Tabela 3 – Deslocamento máximo considerando as calibrações.

		DESLOCAMENTO MÁXIMO (mm)					
	INÉRCIA À TORÇÃO DA VIGA	TEORIA DE GRELHA	MODELO PROPOSTO CALIBRAGEM 0	MODELO PROPOSTO CALIBRAGEM 1	MODELO PROPOSTO CALIBRAGEM 2	Modelo 1	Modelo 1 RIT
VIGA 20X40	100%	0.495	0.527	0.56	0.51	0.314	0.339
	15%	0.495	0.527	0.56	0.51	0.37	0.434
	1%	0.495	0.527	0.56	0.51	0.41	0.526
	0%	0.495	0.527	0.56	0.51	0.42	0.537
VIGA 10X20	100%	0.495	1.01	1.46	0.69	1.18	1.17
	15%	0.495	1.01	1.46	0.69	1.18	1.17
	1%	0.495	1.01	1.46	0.69	1.18	1.17
	0%	0.495	1.01	1.46	0.69	1.18	1.17

Ao analisar os resultados das calibrações utilizadas, constatou-se que houve pouca variação nos valores obtidos e que estes foram semelhantes aos valores obtidos nos modelos que consideraram a redução da inércia à torção da laje, no caso de vigas de borda rígidas. Entretanto, ao considerar vigas de borda flexíveis, verificou-se que a calibração 0 apresentou resultados mais próximos ao Modelo 1 e ao Modelo 1 – RIT.

Pôde-se verificar que a calibração 2 (viga de borda biengastada) gera deslocamentos da laje inferiores aos demais modelos. Essa calibração é adequada ao se utilizar no caso em que os apoios sejam idealizados como pilares de rigidez elevada, que tendem a aumentar o grau de hiperestaticidade das vigas de apoio.

5. Conclusões

Diversos estudos evidenciam que a flexibilidade dos apoios pode alterar significativamente o valor das solicitações e as propriedades dinâmicas da laje. Por isso, as teorias que se baseiam na condição de contorno de apoios rígidos podem não ser adequadas em alguns casos. O modelo proposto baseado na Teoria de Grelha busca apresentar resultados mais precisos para determinar as reações e deslocamentos da laje, inclusive em situações de apoios flexíveis.

As análises numéricas mostraram que lajes com apoios flexíveis sempre apresentam deslocamentos maiores do que lajes com apoios rígidos. A Teoria de Grelha apresentou resultados pouco precisos para os casos em que foram utilizados apoios flexíveis. As solicitações obtidas no modelo proposto foram mais próximas às da análise numérica, dependendo do tipo de calibração utilizada.

A técnica adotada de multiplicar o deslocamento da viga por um coeficiente λ tem o objetivo de obter maior precisão nos deslocamentos sem a necessidade de se obter expressões analíticas complexas. Verifica-se que quanto maior o coeficiente λ , menor é a rigidez dos apoios e maior é o deslocamento na faixa de laje. Ressalta-se que o coeficiente λ não precisa ser necessariamente superior a 1, podendo obter valores inferiores a 1 caso seja considerada a continuidade da viga ou a viga engastada nos pilares. Esse fator busca apenas igualar o deslocamento teórico de viga biapoiada, utilizado como referência, ao deslocamento real da estrutura.

Comparando-se com os resultados obtidos na análise numérica pode-se estimar que as calibrações 0 e 1 forneçam valores mais precisos quando os apoios das lajes são idealizados como apoios simples ou não forneçam rigidez adequada, enquanto a calibração 2 gera resultados próximos ao se considerar apoios que restrinjam de certa forma a rotação das vigas de borda.

Assim, das análises realizadas, pode-se concluir que o modelo proposto apresentou boa concordância e precisão nos resultados, sendo uma alternativa a ser utilizada no cálculo e verificação de lajes com apoios flexíveis.

Referências

- Abdel-karim, R; Mahmood, I. M. (2006). “The Effect Of Beams Stiffnesses On The Load Distribution In A Single Simply Supported Two-Way Ribbed Slab”. *The Islamic University Journal (Series of Natural Studies and Engineering)*. V. 14, n° 1, pp. 191-208.
- Araújo, J. M. (2008). “Avaliação Dos Métodos Simplificados Para Cálculo De Lajes Maciças Apoiadas Em Vigas Flexíveis”. *Teoria e Prática na Engenharia Civil*, n° 12, pp. 1-11.
- Arman, I. M. (2014). “Bending Moments in Beams of Two-Way Slab Systems”. *Global Journal of Researches in Engineering: e Civil And Structural Engineering*, v. 14, n° 2, pp. 77-94.
- Bueno, J. R.; Loriggio, D. D. (2016). “Influence of the flexibility of beams and slabs in static response and dynamic properties”. *Ibracon Structures And Materials Journal*, v.9, pp. 842-855. <https://doi.org/10.1590/S1983-41952016000600003>
- Galyautdinov, Z. R. (2017). “Deformation of reinforced concrete slabs on yielding supports under short-time dynamic loading”. *AIP Conference Proceedings* 1800:040002. <https://doi.org/10.1063/1.4973043>
- Ju, S. H.; Lin, M. C. (1999). “Comparison Of Building Analyses Assuming Rigid Or Flexible Floors”. *Journal Of Structural Engineering*, v. 125, pp. 25-31. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9445\(1999\)125:1\(25\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9445(1999)125:1(25))
- Shu, J; Fall, D; Plos, M; Zandi, K; Lundgren, K. (2015). “Development Of Modelling Strategies For Two-Way RC Slabs”. *Engineering Structures*. V.101, pp. 439-449. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2015.07.003>
- Silva, F. A. N.; Horowitz, B. (2008). “Bending Moments In Beams Of Reinforced Concrete Buildings”. *Ibracon Structures And Materials Journal*, v.1, pp. 193-211. <https://doi.org/10.1590/S1983-41952008000200005>
- Souza, V. C. M.; Cunha, A. J. P. (1998). “Lajes em Concreto Armado e Protendido”, EDUFF.
- Tangwongchai, S; Anwar, N; Chucheepsakul, S. (2011). “Flexural Responses of Concrete Slab over Flexible Girders through FEA-Based Parametric Evaluation”. *KSCCE Journal of Civil Engineering*. V. 15, pp. 1057-1065. <https://doi.org/10.1007/s12205-011-1077-0>