UMA APLICAÇÃO DE GRAFOS A UM PROBLEMA AGRÍCOLA, ENVOLVENDO DISTRIBUIÇÃO DE ÁGUA E TRANSPORTES

Amarildo de Vicente[1], Rogério Luiz Rizzi[2]

RESUMO

Propriedades agrícolas têm necessidade de melhor planejamento da distribuição de tubulações utilizadas para irrigação e, ainda, de racionalização de estradas para veículos. Por isso, este trabalho está subdividido em dois objetivos: o primeiro consiste em determinar por onde deve passar uma rede de tubos, destinada à ligação de diversos pontos em uma área de cultivo, a fim de minimizar a quantidade de tubos; o segundo consiste em encontrar, nesta área, o menor caminho para a passagem de um veículo, que deve visitar os pontos citados, contidos em um projeto agrícola para uma propriedade rural, situada no noroeste do Paraná. Estes problemas foram resolvidos, usando-se recursos da teoria dos grafos. O primeiro, por meio de uma árvore geradora mínima e, o segundo, por meio de um algoritmo para o problema do caixeiro viajante. As soluções destes problemas mostraram que o produtor poderia ter usado 139,4 metros a menos de tubos, em relação ao sistema já implantado, bem como um caminho com 65,3 metros a menos, em relação ao caminho ora utilizado.

Palavras-chave: distribuição de água, árvore de expansão mínima, caminho mínimo.

ABSTRACT

GRAPH THEORY APPLICATION TO RESOLVE AGRICULTURAL PROBLEMS RELATED TO DISTRIBUTION OF WATER PIPES AND VEHICLE TRACKS

Agricultural properties need to have better planning of distribution pipes used for irrigation and also to rationalize road vehicles. Therefore, this paper is divided into two objectives: the first is to determine by where to pass a network of tubes, for the lead of several points in a cultive area in order to minimize the amount of tubes; the second consists of find in this area, the shortest path for passage of a vehicle which must visit the points above, contained in an agricultural project for a rural property, situated in the northwest of Paraná. These problems were solved, using resources of graph theory. The first, using a minimum spanning tree and the second by means of an algorithm for the traveling salesman problem. Solutions of these problems showed that the producer could have used less than 139.4 meters tubes in relation to the system already set up and a way with 65.3 meters unless on the path now used.

Keywords: water distribution, minimum spanning tree, minimum path.

Recebido para publicação em 16/08/2010. Aprovado em 24/02/2011.

1- Graduado em Licenciatura em Matemática pela UEM. Doutor em Engenharia de Produção pela UFSC. Docente do Programa de Pós-Graduação em Energia na Agricultura, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas - Unioeste/Cascavel, email: amarildo.vicente@unioeste.br

2- Graduado em Licenciatura em Matemática pela UNIOESTE. Doutor em Ciência da Computação pela UFRGS. Docente do Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas da Unioeste/Cascavel, email: rogeriorizzi@gmail.com.

INTRODUÇÃO

Em muitas propriedades rurais, principalmente aquelas de pequeno porte, é comum a existência de instalações feitas de modo bastante artesanal, sem o emprego de recursos matemáticos e computacionais, que visem à maior economia para o produtor. Evidentemente, a preocupação com a economia existe, porém, em geral processos computacionais para este fim não são conhecidos pelos produtores. A utilização de tais recursos pode trazer bons resultados, contribuindo para um aumento em sua renda. Como exemplo, pode-se citar o trabalho de Santos (1990), que empregou um modelo de programação linear, a fim de aproveitar a água existente em uma propriedade rural, de forma equilibrada, para maximizar a renda dessa propriedade. Pode-se citar, também, o trabalho de Vereijken (1986), citado por Vereijken (1989), que empregou um modelo integrado de produção envolvendo diversas atividades de uma propriedade rural, a fim de obter um melhor rendimento.

Há dois problemas em destaque, a serem resolvidos, norteando os seguintes objetivos deste trabalho: i) o primeiro, que será denominado "Problema da Tubulação", consiste em determinar por onde os novos tubos condutores de água devem passar, a fim de minimizar a quantidade de tubos necessários e ii) o segundo, que será chamado de "Problema do Roteamento", consiste em encontrar um caminho para a passagem do veículo citado, de forma que seu comprimento seja mínimo. Com isto, pretende-se reduzir as perdas de área para cultivos agrícolas, bem como o consumo de combustível.

Para resolver este problema, serão necessários dois recursos ligados à teoria dos grafos: a árvore geradora mínima e o problema do caixeiro viajante.

Um grafo G(N, A) pode ser definido com um conjunto finito N de pontos (também chamados de nós ou vértices) e um conjunto finito A de arestas (também chamadas de arcos ou "links") ligando esses pontos. Na Figura 1,apresentada adiante, ilustra-se essa definição.

O Problema do Roteamento enquadra-se em um "problema do caixeiro viajante", que, em resumo, consiste em sair de um vértice específico do grafo, chamado de origem, passar por todos os outros vértices uma única vez e retornar para o vértice de origem.

Na Figura 1, a rota a-b-e-d-c-a é um possível caminho para o caixeiro viajante. Já o problema da tubulação enquadra-se em um problema de "árvore geradora mínima", que, em suma, é um grafo que não possui ciclos e cuja soma dos valores das arestas é o menor possível. Estes conceitos podem ser vistos com mais detalhes em (LARSON, 1981).

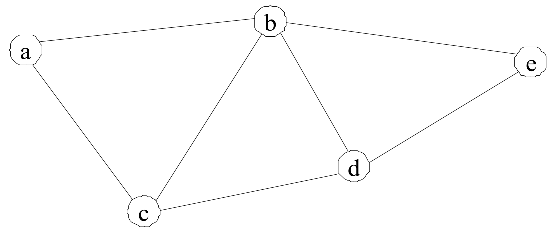

Figura 1. Exemplo de grafo.

A obtenção da solução exata para o problema do caixeiro viajante requer grande esforço computacional e fica inviável para uma quantidade grande de vértices, salvo casos específicos do problema, como pode ser visto em Chekuri *et al.* (2007) e Snyder *et al.* (1992). Para exemplificar, em um grafo completo com n vértices há $(n-1)!/2$ caminhos diferentes que podem ser percorridos. Para $n = 20$, por exemplo, esse número é de 19!/2. Em um computador que realiza a análise de 100.000 caminhos por segundo, o tempo gasto seria de 19!/200.000 segundos, o que equivale, aproximadamente, a 608.225.502.044 dias. Levado este fato em consideração, quando o número de arestas do grafo é muito grande, o que se faz, geralmente, é utilizar heurísticas que não garantem a solução ótima, mas dão uma boa solução em um tempo viável. Uma das heurísticas que podem ser empregadas para obter uma solução para o problema do caixeiro viajante, considerando-se todos os n vértices de um grafo G, com saída e chegada a um vértice i, pode ser obtida em Larson *et al*. (1981).

MATERIAL E MÉTODOS

O trabalho aqui apresentado foi desenvolvido com base em um projeto de interesse em uma propriedade rural situada no município de Alto Paraná, noroeste do Estado do Paraná. Tal projeto consiste na captação de água de um riacho, que passa no fundo da propriedade citada, para ser utilizada na irrigação de hortaliças, na aplicação de insumos, na lavagem de produtos colhidos, etc. Com o uso de uma bomba, a água é conduzida, por meio de um tubo, a um reservatório situado em um ponto alto da propriedade. Deste ponto alto, ela é distribuída a diversos pontos, que aqui serão denominados de "pontos de parada" (ver Figura 2).

Nesta figura, a região legendada como "vala" representa uma voçoroca, produzida por enxurradas oriundas de uma rodovia que passa nas proximidades. Na vala, só há dois pontos para travessia de veículos e pedestres, legendados como "passagem". As partes legendadas como "árvores" representam regiões em que há árvores frutíferas, onde não é possível fazer plantios. Os "carreadores" são caminhos já existentes na propriedade.

Para que seja feita a distribuição da água nos pontos de parada, é necessário utilizar tubos plásticos, cuja quantidade consumida depende da forma com que é feita a ligação entre o reservatório e os referidos pontos de parada. A configuração atualmente utilizada pelo produtor para esta ligação está ilustrada na Figura 3, apresentada a seguir. Esta distribuição gerou um total de 1.046,3 metros de tubos, quantidade que pode ser reduzida, conforme será mostrado na seção "Resultados e Discussões".

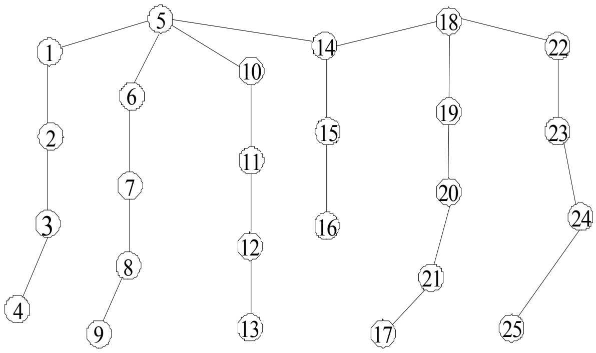

Figura 3. Configuração atual para a tubulação de água.

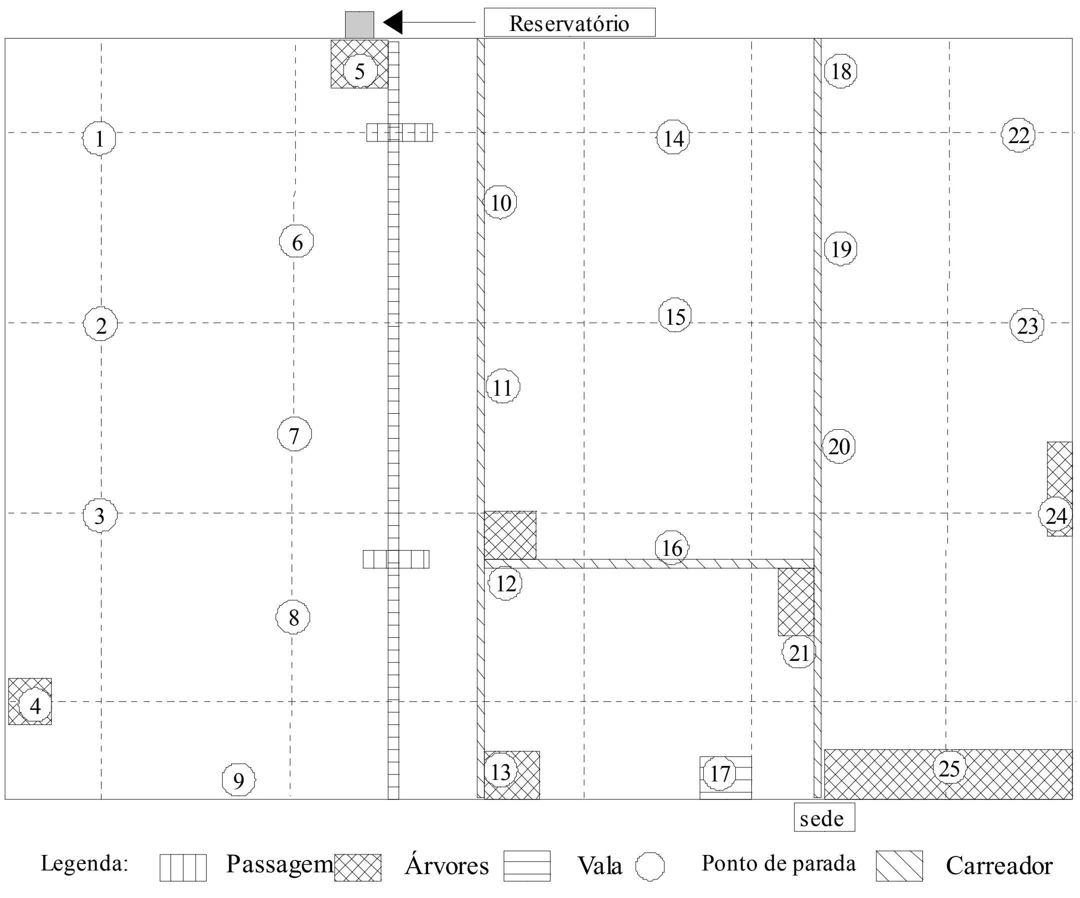

Figura 2. Representação da região de cultivo.

Em cada um dos pontos de parada, há uma torneira e uma caixa de armazenagem, destinadas a fins diversos. Eventualmente, um veículo deve passar por esses pontos, ora para coletar produtos colhidos, como verduras, frutas, etc., ora para descarregar insumos, como fertilizantes, embalagens, etc. Este veículo deve sair da sede, iniciar seu percurso pelo vértice 21 da Figura 2 e, em seguida, retornar para a sede, passando novamente pelo vértice 21. A sede fica fora da área de cultivo, cerca de 40 metros de distância do vértice 21 (ver Figura 2). A opção de iniciar o percurso pelo vértice 21 é para facilitar o trabalho, tendo em vista que existe um pequeno depósito nesse ponto, local comumente utilizado para o armazenamento de insumos.

A fim de que o veículo passe pelos pontos de parada, é necessário reservar um caminho para ele. Neste caminho, nada pode ser cultivado, o que reduz a área disponível para plantio. Na Figura 4, está apresentado o percurso atualmente usado pelo produtor.

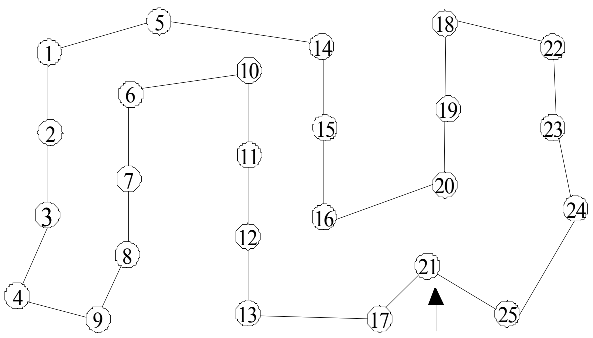

Figura 4. Caminho atual para deslocamento do veículo.

Com esta configuração, o veículo deve percorrer um total de 1.136,7 metros, distância que pode ser reduzida, conforme será visto na seção “Resultados e Discussões”.

Conforme exposto anteriormente, o projeto citado é composto por dois problemas: Problema da Tubulação e Problema do Roteamento. A seguir, serão explanadas as formas de resolução de cada um deles.

O problema da tubulação consiste em encontrar os caminhos por onde a tubulação deve passar, a fim minimizar o consumo de tubos. Primeiramente, deve ser feita uma ligação do reservatório até o vértice 5, que se encontra ao seu lado. É razoável que, a partir do vértice 5, escolha-se o que está mais próximo a ele (vértice 6), para fazer a próxima ligação. Depois disso, como a água pode fluir tanto do vértice 5 quanto do 6, pode-se fazer a próxima ligação até o vértice mais próximo desses dois, ou qualquer um dos que estiverem mais próximos, caso haja empate. Procedendo-se desta maneira, obtém-se uma árvore geradora mínima ou árvore de expansão mínima, (LARSON *et al*., 1981; RABUSKE, 1992; BOAVENTURA, 2003). Esta é a ideia central do algoritmo conhecido como Algoritmo de Dijkstra, que foi empregado para resolver este problema, além de ser escolhido por ser de fácil implementação e por exigir pouco esforço computacional. Tal algoritmo está apresentado a seguir.

Algoritmo de Dijkstra para árvore geradora mínima.

Definiu-se como sendo G(N, A) um grafo conexo não orientado com n vértices. Consideraram-se os conjuntos N_1 e A_1.

1. Considerou-se N_1 = { } e A_1= { }.
2. Construiu-se uma fila de prioridades Q, contendo todas as arestas de A.
3. Escolheu-se uma aresta (x, y) de Q de menor custo.
4. Enquanto existiam elementos em N -realizou-se
5. Realizou-se (x, y) de Q
6. Adicionou-se (x, y) a A_1.
7. Apagaram-se os vértices x e y de N e adicionou-se a N_1.
8. Se $N \neq \{\ \}$ então escolhia-se a aresta (x, y) de menor custo em Q tal que $x \in N$ e $y \in N_1$ ou $x \in N_1$ e $y \in N$.
9. Fim enquanto
10. Saída: Árvore de custo mínimo $T(N_1, A_1)$

Em relação ao problema do roteamento, conforme abordado anteriormente, um veículo deve iniciar sua trajetória no vértice 21, passar por todos os outros vértices e retornar ao vértice 21. O que se deseja é que esse circuito seja o menor possível. Para este problema, foi considerada a métrica euclidiana, em algumas arestas, e a métrica retangular, em outras. A escolha foi feita de acordo com a conveniência, a fim de passar, sempre que possível, por caminhos já existentes (carreadores). Por exemplo, para se deslocar do vértice 11 ao 15 (ver Figuras 2 e 6) segue-se 10 metros pelo carreador, em direção ao vértice 10, e só aí se desloca à direita, 35 metros, na direção do vértice 15. Com isso, são utilizados apenas 35 metros para construção de um novo caminho. Caso fosse utilizada a métrica euclidiana, indo em linha reta do vértice 11 ao 15, o caminho seria mais curto, 36.4 metros. Todavia, para isso, seria necessário construir todo o caminho sobre terra cultivável, o que é indesejável. Na solução obtida, a métrica retangular foi adotada nas arestas (10, 14), (14, 18), (11,15), (15, 19) e (5, 10). Nas demais, foi empregada a métrica euclidiana.

Para solucionar o problema proposto, em que o número de arestas é pequeno, foi empregado um modelo de programação linear mista, como sugerido por Miller *et al.* (1960), citado por Goldbarg (2005). Este modelo está apresentado a seguir.

$$Minimizar \sum_{(i,j)\in G} c_{ij}\, x_j$$

(i e j são índices para os vértices do grafo G)

$$Sujeito\ a\ \sum_{i=2}^{n} x_{i1} = 1,\ (i, 1) \in G$$

(O vértice 1 é o vértice de saída e de chegada e esta soma obriga que tal chegada ocorra a partir de um vértice i. Começar com $i = 2$ evita sair do vértice 1 e retornar imediatamente a este vértice)

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ji} = 1,\ j = 2, ..., n, (j,\ i) \in G$$

(Fixando j, esta soma obriga a que uma e somente uma saída do vértice j com chegada ao vértice i se realize. Começar com j = 2 evita sair do vértice 1 e retornar imediatamente a ele)

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ji} = 1, i = 2, ..., n, (j,\ i) \in G$$

(Fixado i, esta soma obriga a que uma e somente uma saída do vértice j com chegada ao vértice i se realize. Começar com $i = 2$ evita sair do vértice 1 e retornar imediatamente a ele)

$u_i - u_j + nx_{ij} \leq n - 1,\ 2 \leq i \neq j \leq n,\ (i, j)\ \ G,$

$u_i \geq 0,\ 2 \leq i \leq n,$

$x_{ij} \in \{0, 1\},$

em que

c_{ij} = custo para percorrer a aresta (i, j); e

x_{ij} = 1 se a aresta (i, j) for inclusa no percurso e 0 em caso contrário.

RESULTADOS E DISCUSSÕES

Para resolver o Problema da Tubulação foi implementado o algoritmo de Dijkistra, apresentado. Esta implementação foi feita na linguagem Delphi, em um computador de 3.0 Ghz. A execução do programa produziu como resultado a árvore apresentada na Figura 5, a seguir.

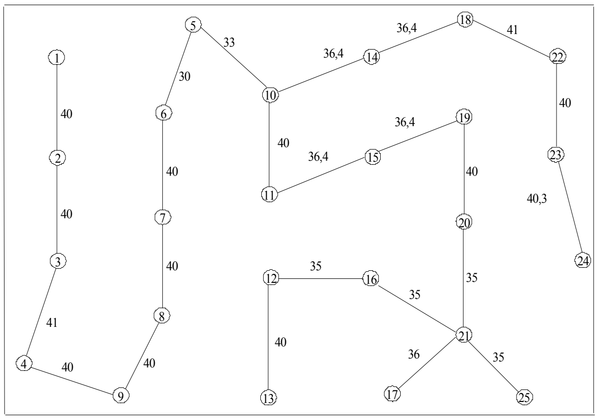

Figura 5. Caminhos por onde os tubos condutores de água devem passar.

O tempo de execução foi insignificante, cerca de 2 segundos. A árvore obtida possui um comprimento de 906,9 metros. Esta é a quantidade de tubos que deverá ser gasta. O conjunto das arestas correspondente é A = {(5, 6), (6, 7), (7, 8), (8, 9), (9, 4), (4, 3), (3, 2), (2, 1), (5, 10), (10, 14), (14, 18), (18, 22), (22, 23), (23, 24), (10, 11), (11, 15), (15, 19), (19, 20), (20, 21), (21, 25), (21, 17), (21, 16), (16, 12), (12, 13)}.

O Problema do Roteamento foi resolvido pelo modelo apresentado na seção anterior. A aplicação desse modelo apresentou como solução o caminho ilustrado na Figura 6, a seguir.

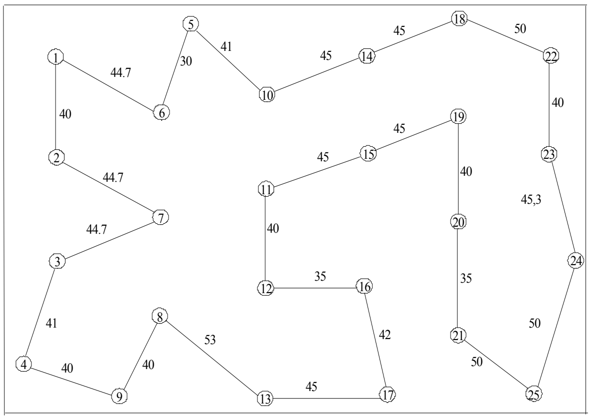

Figura 6. Caminho mínimo para o Problema do Roteamento.

Para isto, foi empregado o software GLPSOL, que é um componente do pacote GLPK. Esse software é livre e pode ser obtido na página http://www.gnu.org/software/glpk. O computador utilizado foi o mesmo já citado e o tempo de execução foi de 30.3 segundos. A rota encontrada como solução é S = {(21, 20), (20, 19), (19, 15), (15, 11), (11, 12), (12, 16), (16, 17), (17, 13), (13, 8), (8, 9), (9, 4), (4, 3), (3, 7), (7, 2), (2, 1), (1, 6), (6, 5), (5, 10), (10, 14), (14, 18), (18, 22), (22, 23), (23, 24), (24, 25), (25, 21)}. O comprimento deste caminho é de 1.071,4 metros.

Há que ressaltar que, se o único objetivo fosse a minimização de perdas de terra, não levando em conta a distância percorrida, a melhor solução seria percorrer os ramos determinados pela árvore geradora mínima. Outro fator a ser considerado é que, algumas arestas estão dispostas sobre caminhos já existentes na propriedade, chamados de carreadores. Nestas arestas, não há perda de terra, todavia, transitar por elas também gera custos, razão pela qual tais arestas foram contadas no percurso de modo similar às demais.

CONCLUSÕES

- Durante o desenvolvimento deste trabalho, devido ao contato com diversos produtores, pôde-se constatar que grande parte deles realiza suas atividades de maneira intuitiva, de forma que os recursos de matemática e de computação podem ser considerados fatores negativos em seu planejamento;
- Em relação ao problema do roteamento, o caminho apresentado na solução obtida possui um comprimento de 1074,4 metros contra 1.136,7 metros do caminho atualmente utilizado, acarretando uma redução de 65,3 metros. Esta redução no comprimento do caminho acarreta uma economia pequena, em termos de gastos com transportes propriamente dito, uma média de 0,3 litro de óleo diesel por dia, ou 108 litros por ano. Porém, como o caminho deve ter uma largura de aproximadamente 2,5 metros, esta redução significa aumento aproximado de 160 m^2 de área para plantio. Em se tratando de hortaliças, 1 m^2 de área pode gerar até R$ 3,00 reais por ano, totalizando R$ 480,00 a mais para o produtor. É necessário um planejamento adequado para que haja um bom aproveitamento dos recursos de capital e mão de obra disponíveis, mesmo que eles sejam pequenos, como pode ser exemplificado no trabalho de Raduan (2009), que emprega um modelo de roteamento, testado para uma empresa de manutenção de elevadores. Este teste apresentou resultados melhores em relação ao sistema até então utilizado, propiciando economias que variam de 6 a 35%. Pode-se citar ainda o trabalho de Barão *et al*. (2008), que determinou a rota ótima para a coleta de resíduos sólidos de seu município;
- Para o problema da tubulação, a configuração apresentada pela solução obtida gera um total de 906,9 metros de tubos contra 1.046,3 da configuração atual, acarretando uma redução de 139,4 metros. Embora esta redução não seja economicamente significativa, cerca de R$ 300,00 entre custo de materiais e mão de obra para instalações, ela serve de alerta para situações em que a propriedade possui maiores dimensões, caso em que tal diferença poderia ser bastante significativa, uma vez que representa 15% a menos em relação ao sistema atual. Além disso, toda instalação está sujeita a manutenções em algum momento de sua vida útil, razão pela qual a redução de sua extensão reduz também o risco desta ocorrência; e

- Muito embora as reduções ocorridas não pareçam tão expressivas, levando-se em conta que a área de plantio é pequena, elas foram bastante relevantes ao trabalho operacional do produtor rural.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BARÃO, F.R.; KRIPKA, M.; KRIPKA, R.M.L. Determinação da Rota Ótima para a Coleta de Resíduos Sólidos Urbanos no Município de Passo Fundo – RS. In: XXXI CONGRESSO NACIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL, 08 a 11 de setembro de 2008, Belém. **Anais...** Belém: CNMAC, 2008. p.7

BOAVENTURA, P.O.N. **Teoria e Modelos de Grafos**. São Paulo: Editora Edgard Blücher, 2003. 314p.

CHEKURI, C.; PAL, M. An O(log n) approximation Ratio for the Asymmetric Traveling Salesman Path Problem. **Theory of Computation**, cidade, v.3, p.197-209, 2007. Disponível em <http://www.theoryofcomputing.org/articles/v003a010>. Acesso em 04 ago. 2010.

GOLDBARG, M.C; LUNA H.P.L. **Otimização Combinatória e Programação Linear: modelos e algoritmos.** Rio de Janeiro: Editora Campus, 2005. 51 p.

LARSON, R.C.; OLDONI, A.R. **Urbans Operations Research**. New Jersey: Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1981. 571p.

RABUSKE, M.A. **Introdução à Teoria dos Grafos**. Florianópolis: Editora da UFSC, 1992. 173 p.

RADUAN, A. C. Roteirização Parcialmente Dinâmica Aplicada a Serviços de Campo. 2009. 121f Dissertação (Mestrado em Engenharia) Escola Politécnica da Universidade de São Paulo - Departamento de Engenharia de Transportes, São Paulo. 2009.

SANTOS, A.C. Utilização da Programação Linear na Determinação da Combinação que Maximize a Renda da Empresa Rural. **Caderno de Administração Rural**, Lavras, v.2, n.2, p.109-125, jul./dez. 1990.

SNYDER, T.L.A. Priori Inequalities for the Euclidean Travelling Salesman Problem. **Proceedings of the Eight Annual Symposium: Computational Geometry,** New York, ACM Press, v.24, p.344-349, 1992. Disponível em <http://www-stat.wharton.upenn.edu/~steele/Publications>. Acesso em 04 ago. 2010.

VEREIJKEN, P. Experimental Systems of Integrated and Organic Wheat Production. **Agricultural Systems**, England, Elsevier Science Publishers Ltd, v.30, p.187-197, 1989.

VEREIJKEN, P. From Conventional to Integrated Agriculture. **Netherlands Journal of Agricultural Science**, Wageningen, v.34, n.3, p.387-393, 1986.